МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФНДЕРАЦИИ

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Кафедра высшей математики

# ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

(Задачи и упражнения)

Учебно-методическое пособие

МОСКВА 2002

УДК 517
Я47

Рецензент
Доктор физико-математических наук, чл. корр. РАН *О.В. Бесов*

**Введение в анализ.** (Задачи и упражнения): Учебно-метод. пособие / Сост. Г.П. Яковлев. – М: МФТИ, 2002. – 40 с.
ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

**(Задачи и упражнения)**

Учебно-методическое пособие

Составитель **Яковлев Геннадий Николаевич**
Редактор *И.А. Волкова*
Корректор *О.П. Котова*
Подписано в печать 18.09.02. Формат 60х84 1/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 2,5. Уч. изд. л. 2,3. Тираж 100 экз. Заказ № ф 352.
Московский физико-технический институт
(государственный университет)
Отдел автоматизированных издательских систем
"ФИЗТЕХ-ПОЛИГРАФ"
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9

ОГЛАВЛЕНИЕ

# Предисловие

Настоящее пособие содержит упражнения и задачи, которые можно отнести к разделу "Введение в математический анализ". Кроме того, здесь приведены определения основных понятий и формулировки основных утверждений теории действительных чисел, числовых последовательностей и непрерывных функций. Более подробные разъяснения и доказательства можно найти в учебном пособии Г.Н. Яковлева "Лекции по математическому анализу", часть 1.

Как и в "Лекциях", здесь предполагается, что конечные десятичные дроби мы умеем сравнивать, складывать, вычитать и умножать по обычным правилам арифметики. Исходя из этого, для бесконечных десятичных дробей вводятся понятия "равно", "меньше", "больше", и тем самым множество всех бесконечных десятичных дробей превращается в линейно упорядоченное множество, которое обозначается **R** и называется множеством действительных чисел. Далее с помощью понятия окрестности определяется понятие предела числовой последовательности и доказывается одна из основных теорем – теорема о существовании предела у монотонной ограниченной последовательности. На основе этой теоремы, используя десятичные приближения, строится арифметика действительных чисел.

После того, как уже определены сумма, разность, произведение и частное действительных чисел, доказываются теоремы о пределе суммы, разности, произведения и частного числовых последовательностей. А затем даются определения степеней и логарифмов и доказываются их основные свойства.

Отметим, что такие утверждения, как принцип вложенных отрезков действительной прямой, теорема Больцано-Вейерштрасса о частичных пределах и критерий Коши для числовой последовательности, доказываются на основе теоремы о существовании предела у монотонной последовательности.

Первая глава завершается рассмотрением разных классов множеств точек числовой прямой: ограниченных и неограниченных, счетных и несчетных, открытых и замкнутых, а также измеримых и неизмеримых.

Вторая глава пособия посвящена числовым функциям одной переменной. Здесь рассматриваются пределы функций, их свойства и основные свойства непрерывных функций. Отметим, что так как уже есть понятие предельной точки, то пределы функций определяются в предельных точках (как конечных, так и бесконечных). А так как уже есть и понятия открытых и замкнутых множеств, то свойства непрерывных функций тоже формулируются с использованием этих понятий. Например: "При непрерывном отображении образом компакта является компакт".

Завершается пособие рассмотрением некоторых понятий, связанных с изучением асимптотического поведения функций в окрестности предельных точек.

Следует отметить, что настоящее пособие почти не содержит так называемых тренировочных задач и поэтому не может быть рекомендовано в качестве единственного учебного сборника задач и упражнений.

# I
# Числовые последовательности и множества

## § 1.
## Введение: множества и кванторы

Одним из первичных понятий в математике является понятие множества и его элементов. Если объект $a$ элемент множества $A$, то пишут $a \in A$ или $A \ni a$. Запись $a \notin A$ означает, что объект $a$ не является элементом множества $A$. Если каждый элемент множества $A$ является элементом множества $B$, то $A$ называют подмножеством множества $B$ и пишут $A \subset B$. В противном случае пишут $A \not\subset B$.

Множества $A$ и $B$, состоящие из одних и тех же элементов, называют равными и пишут $A = B$.

Для любых множеств $A$ и $B$ через $A \cup B$ обозначают их объединение, а через $A \cap B$ – пересечение, т.е. общую часть этих множеств. Очевидно, операции объединения и пересечения обладают свойством коммутативности, т.е.

$$A \cup B = B \cup A\,,\ \ A \cap B = B \cap A\,.$$

Если $A$ и $B$ не имеют общих элементов, то говорят, что множества $A$ и $B$ не пересекаются, и пишут $A \cap B = \varnothing$, где $\varnothing$ – обозначение пустого множества. Множество, состоящее из всех элементов множества $A$, не принадлежащих множеству В, называется разностью множеств $A$ и $B$ и обозначается $A \backslash B$. Очевидно, если $A \subset B$, то $A \backslash B = \varnothing$.

Доказать следующие утверждения.

1. Операции объединения и пересечения обладают свойством ассоциативности, т.е. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ для любых множеств $A, B, C$.
2. Операция объединения относительно операции пересечения и, наоборот, пересечения относительно объединения обладают свойством дистрибутивности, т.е. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.
3. Каждое из равенств $A \cup B = B$ и $A \cap B = A$ справедливо тогда и только тогда, когда $A \subset B$.
4. Для любых множеств $A$, $B$, $C$:
   1) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;
   2) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;
   3) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$;
   4) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$.

Говорят, что между элементами множеств $X$ и $Y$ установлено взаимно однозначное соответствие, если имеется правило, по которому каждому $x \in X$ ставится в соответствие единственный элемент $y \in Y$ и каждый $y \in Y$ поставлен в соответствие единственному $x \in X$.

Два множества называются равномощными, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие.

Множество, равномощное множеству **N** всех натуральных чисел, называется счетным.

Непустое множество называется конечным, если оно состоит из $n$ элементов, где $n$ – некоторое натуральное число. В противном случае множество называется бесконечным.

Доказать следующие утверждения.

5. Любое бесконечное множество имеет счетное подмножество.
6. Объединение любого конечного числа счетных множеств является счетным множеством.

7. Объединение произвольного бесконечного множества $X$ и счетного множества равномощно множеству $X$.
8. Множество **Q** всех рациональных чисел счетно.
9. Объединение счетного числа счетных множеств является счетным множеством.

В математических определениях и утверждениях часто употребляются выражения "для каждого (любого, всех) ..." и "существует ... такое (такой, такая), что ...". Эти выражения обозначаются соответственно $\forall$ и $\exists$ и называются кванторами: $\forall$ квантор всеобщности, $\exists$ – квантор существования.

Используя кванторы, определение включения $A \subset B$ можно сформулировать так:

$$A \subset B, \text{ если } \quad \forall x \in A : x \in B,$$

а тот факт, что $A \not\subset B$, – следующим образом:

$$A \not\subset B, \text{ если } \exists x \in A : x \notin B.$$

Здесь двоеточие означает, что после него идет высказывание, которое справедливо для указанных $x$. Для квантора $\forall$ иногда отступают от такого порядка написания. Например, вместо $\forall n \in \mathrm{N} : 2n > n$ пишут $2n > n \forall n \in \mathrm{N}$, что вполне соответствует стилистике русского языка: вместо "для любого $n \in \mathrm{N} 2n > n$ можно сказать "$2n > n$ для любого $n \in \mathrm{N}$".

Приведем еще один пример использования кванторов.

Функция $f(x)$, определенная на **R**, называется периодической, если она удовлетворяет условию:

$$\exists T > 0 : \forall x \in R : f(x+T) = f(x).$$

Соответственно, $f(x)$ не будет периодической, если она удовлетворяет противоположному условию, т.е.

$$\forall T > 0 \exists x \in R : f(x+T) \neq f(x).$$

## § 2.
## Бесконечные десятичные дроби и действительные числа

Напомним, что еще в школе наряду с конечными десятичными дробями, т.е. символами вида

$$\pm \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_n, \ (1)$$

где $\alpha_0$ – целое неотрицательное число, а $\pm \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_n$ – последовательность из $n$ цифр, рассматривались и бесконечные десятичные дроби, т.е. символы вида

$$\pm \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_n \alpha_{n+1} ..., \ (2)$$

где $\pm \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 ... \alpha_n \alpha_{n+1} ...$ – бесконечная последовательность цифр.

Будем считать, что конечные десятичные дроби мы умеем сравнивать, складывать, вычитать и умножать по обычным правилам арифметики. Исходя из этого, для бесконечных десятичных дробей прежде всего введем соотношения порядка, т.е. определим понятия "равно", "меньше", "больше". Так упорядоченное множество всех десятичных дробей обозначается **R** и называется множеством действительных чисел, а каждый элемент этого множества – действительным числом.

Для любой десятичной дроби а вида (2) конечная десятичная дробь (1) называется $n$-отрезком дроби $\alpha$ и обозначается $(\alpha)_n$.

Десятичные дроби $\alpha$ и $\beta$ называются равными: $\alpha = \beta$, если

$$\forall n : \left| (\alpha)_n - (\beta)_n \right| \leq 10^{-n}.$$

Говорят, что дробь $\alpha$ меньше дроби $\beta$ : $\alpha < \beta$ (или $\beta$ больше $\alpha$ : $\beta > \alpha$), если,

$$\exists n : (\beta)_n - (\alpha)_n > 10^{-n}.$$

Очевидно, одинаковые десятичные дроби равны, но равными могут быть и разные десятичные дроби. Например, 0,99...9... = 1,00...0... = 1.

Для любой десятичной дроби $\alpha \geq 0$ конечные десятичные дроби $(\alpha)_n$ и $(\alpha)_n + 10^{-n}$ называются $n$-ми десятичными приближениями (соответственно нижним и верхним) и обозначаются $(\overline{\alpha})$ и $(\underline{\alpha})_n$.

Таким образом, если $\alpha \geq 0$, то

$$(\underline{\alpha})_n = (\alpha)_n,\ (\overline{\alpha})_n = (\alpha)_n + 10^{-n}.$$

Если же $\alpha < 0$, то, по определению,

$$(\underline{\alpha})_n = (\alpha)_n - 10^{-n},\ (\overline{\alpha})_n = (\alpha)_n.$$

Почти очевидно, что у любого действительного числа $\alpha$ нижние десятичные приближения с возрастанием $n$ не убывают, а верхние не возрастают, причем

$$(\underline{\alpha})_n \leq \alpha \leq (\overline{\alpha})_n \forall n$$

Действительные числа, возникающие на практике, часто имеют особые обозначения, поэтому говорят, что каждое действительное число изображается некоторой десятичной дробью, а каждая десятичная дробь является представлением некоторого действительного числа.

Для наглядности действительные числа изображают точками прямой, на которой выбрано направление и начало отсчета. Поэтому множество **R** всех действительных чисел часто называют действительной (числовой) прямой (или осью), а действительные числа – точками этой прямой.

Напомним, что множество всех $x \in R$ таких, что $a \leq x \leq b$, называется отрезком числовой прямой **R** и обозначается $[a;b]$, а множество всех $x \in R : a < x < b$ называется интервалом и обозначается $(a;b)$.

1. Используя кванторы $\forall$ и $\exists$, сформулируйте свойство, которое в множестве всех бесконечных десятичных дробей выделяет конечные десятичные дроби.
2. Дайте определение периодической десятичной дроби.
3. Дайте определение соотношения $\alpha \neq \beta$.
4. Доказать, что 0,99...9... = 1; 0,199...9... = 0,2.
5. Доказать, что две разные десятичные дроби равны тогда и только тогда, когда одна из них конечная, а другая периодическая с периодом 9.
6. Доказать, что если $\alpha = \beta$, а $\beta = \gamma$, то $\alpha = \gamma$ т.е. что равенство обладает свойством транзитивности.
7. Существуют ли десятичные дроби $\alpha$ и $\beta$ такие, что

$$\exists n_1 : (\alpha)_{n_1} < (\beta)_{n_1},$$
$$\exists n_2 : (\alpha)_{n_2} > (\beta)_{n_2}?$$

8. Доказать, что $\forall \alpha \in R$

$$(\underline{\alpha})_n \leq (\underline{\alpha})_{n+1},\ (\overline{\alpha})_n \geq (\overline{\alpha})_{n+1} \forall n,$$
$$(\underline{\alpha})_n \leq \alpha \leq (\overline{\alpha})_n \forall n.$$

9. Доказать, что $\alpha < \beta$ тогда и только тогда, когда

$$\exists n : (\overline{\alpha})_n < (\underline{\beta})_n.$$

10. Доказать, что понятия "меньше" и "больше" обладают свойством транзитивности, т.е. если $\alpha < \beta$, а $\beta < \gamma$, то $\alpha < \gamma$.
11. Доказать, что для любых $\alpha, \beta \in R$ выполняется одно и только одно из трех соотношений : $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$ или $\alpha > \beta$.

12. Доказать, что любой интервал числовой прямой содержит конечную десятичную дробь. Верно ли это утверждение для произвольного промежутка числовой прямой?
13. Под окрестностью заданной точки числовой прямой будем понимать любой интервал, содержащий эту точку. Доказать, что любые две точки числовой прямой имеют непересекающиеся окрестности.

## § 3.
## Предел числовой последовательности

Пусть имеется правило, которое каждому $n \in N$ ставит в соответствие некоторое $a_n \in R$ Тогда множество всевозможных пар $(n;a_n)$ называется числовой последовательностью и обозначается либо $\{a_n\}$ либо $a_n$, $n \in N$, либо $a_1, a_2, ..., a_n, ...$. Пара $(n;a_n)$ называется $n$-м элементом этой последовательности и обычно обозначается просто $a_n$. Число $n$ называется номером, а число $a_n$ – значением $n$-го элемента.

Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной сверху, если $\exists M : \forall n x_n \le M$. Если же $\exists m : \forall n x_n \ge m$, то $\{x_n\}$ называется ограниченной снизу. Последовательность называется ограниченной, если она ограничена и сверху, и снизу.

Последовательность $\{x_n\}$ называется монотонно возрастающей, если $\forall n x_n \le x_{n+1}$. Если же $\forall n x_n \ge x_{n+1}$, то $\{x_n\}$ называется монотонно убывающей. Последовательность называется монотонной, если она или монотонно возрастающая, или монотонно убывающая.

Последовательность $\{x_n\}$ называется строго возрастающей, если $\forall n x_n < x_{n+1}$. Если же $\forall n x_n > x_{n+1}$ то $\{x_n\}$ называется строго убывающей. Строго возрастающие и строго убывающие последовательности называются строго монотонными.

Последовательность $\{y_k\}$ называется подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$, если

$$\forall k \ \ \exists n = n_k : y_k = x_{n_k},$$

причем $\{n_k\}$ строго возрастает. Эта подпоследовательность обозначается $\{x_{n_k}\}$.

Число $x$ называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если

$$\forall (a;b) \ni x \ \ \exists N : \forall n \ge N \ \ x_n \in (a;b). \ (1)$$

Любой интервал $(a;b) \ni x$ называется окрестностью числа (или точки) $x$ и обозначается $O(x)$. Поэтому условие (1) можно записать еще и так:

$$\forall O(x) \ \ \exists N : \forall n \ge N \ \ x_n \in O(x).$$

В этом случае пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ или “$x_n \to x$ при $n \to \infty$” и говорят, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к $x$.

Такие пределы называются конечными. Наряду с ними рассматриваются и бесконечные пределы. А именно, если

$$\forall M \ \ \exists N : \forall n \ge N \ \ x_n > M,$$

то пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ или “$x_n \to +\infty$ при $n \to \infty$” и говорят, что $\{x_n\}$ сходится к $+\infty$. Если же

$$\forall m \ \ \exists N : \forall n \ge N \ \ x_n < m,$$

то пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ и говорят, что $\{x_n\}$ сходится к $-\infty$.

Доказать следующие утверждения:

1. Последовательность $\{x_n\}$ ограничена тогда и только тогда, когда

$$\exists M : \forall n \,|\, x_n \,|\leq M \,.$$

2. У любого $x \in R$ последовательности $\{(\underline{x})_n\}$ и $\{(\overline{x})_n\}$ ограничены.
3. У любого $x \in R$ последовательность $\{(\underline{x})_n\}$ возрастает, а $\{(\overline{x})_n\}$ монотонно убывает.
4. Если монотонная последовательность $\{x_n\}$ целых чисел ограничена, то она стационарная, т.е.

$$\exists N : \forall n \geq N \quad x_n = x_N \,.$$

5. Любая строго монотонная последовательность целых чисел является неограниченной.
6. Если монотонно возрастающая (убывающая) последовательность целых чисел является неограниченной, то у нее есть строго возрастающая (убывающая) подпоследовательность.
7. Любая числовая последовательность может иметь только один предел (конечный или бесконечный).
8. Любая стационарная последовательность имеет конечный предел.
9. $\lim\limits_{n\to\infty} 10^{-n} = 0$.
10. Для любого $x \in R$ $\lim\limits_{n\to\infty} (\underline{x})_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} (\overline{x})_n = x$.
11. Последовательность $x_n = (-1)^n \cdot 0{,}1$, $n \in N$, не имеет предела (ни конечного, ни бесконечного).
12. Если последовательность $\{x_n\}$ неограничена и монотонно возрастает (убывает), то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ (соответственно $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ ).
13. Если последовательность имеет конечный предел, то она ограничена. Справедливо ли обратное утверждение?
14. Если последовательность сходится к $+\infty$, то она ограничена снизу и неограничена сверху. Если же она сходится к $-\infty$, то она ограничена сверху и неограничена снизу.
15. У любой неограниченной сверху (снизу) последовательности существует подпоследовательность, сходящаяся к $+\infty$ (соответственно к $-\infty$ ).
16. Если последовательность имеет предел (конечный или бесконечный), то и любая ее подпоследовательность сходится к тому же пределу.
17. Если монотонная последовательность действительных чисел ограничена, то она имеет конечный предел.
18. Для любого $k \in N$ $\lim\limits_{n\to\infty} n^k = +\infty$.
19. Привести пример последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, имеющих одно и то же множество значений и таких, что
    1) $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся, но $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;
    2) $\{x_n\}$ сходится, а $\{y_n\}$ расходится.
20. Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся к разным пределам, но у них множества значений совпадают, то эти множества конечные.
21. Если последовательность $\{x_n\}$ такая, что $x_{2k} \to a$, $x_{2k-1} \to b$ и $a \neq b$, то она расходится. Если же $a = b$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.
22. У любой последовательности есть монотонная подпоследовательность.

## § 4.
## Арифметика действительных чисел

Для любых действительных чисел $a$ и $b$ предел последовательности $r_n = (\underline{a})_n + (\underline{b})_n$, $n \in N$, называется суммой чисел $a$ и $b$ и обозначается $a+b$, а предел последовательности $x_n = (a)_n (b)_n$, $n \in N$, называется произведением чисел $a$ и $b$ и обозначается $ab$. Таким образом, по определению,

$$a + b = \lim_{n\to\infty}((\underline{a})_n + (\underline{b})_n)$$

$$ab = \lim_{n\to\infty}(a)_n (b)_n .$$

Для заданного числа $a$ число $b$ такое, что $a+b=0$, называется противоположным и обозначается $-a$, а число $x$ такое, что $ax=1$, называется обратным и обозначается $a^{-1}$. По определению,

$$a - b = a + (-b), \ \frac{a}{b} = a \cdot b^{-1} .$$

Доказать следующие утверждения.

1. Для любых $a, b \in R$

$$\lim_{n\to\infty}((\bar{a})_n + (\bar{b})_n) = a + b, \ \lim_{n\to\infty}((a)_n + (b)_n) = a + b .$$

2. Сумма любых двух действительных чисел существует и определена однозначно.
3. Сложение двух действительных чисел обладает свойством ассоциативности, т.е.

$$(a+b)+c = a+(b+c) \ \ \forall a,b,c \in R .$$

4. Любое действительное число имеет противоположное, и притом единственное.
5. Для любого $a \in R$ $-(-a)=a$.
6. Для любых $a, b \in R$ $-(a+b)=(-a)+(-b)$.
7. Для любых $a, b \in R$

$$\lim_{n\to\infty}(\underline{a})_n (\underline{b})_n = ab, \ \lim_{n\to\infty}(\bar{a})_n (\bar{b})_n = ab .$$

8. Произведение любых двух действительных чисел существует и определено однозначно.
9. Операции сложения и умножения действительных чисел связаны свойством дистрибутивности, т.е.

$$a(b+c) = ab + ac \ \ \forall a,b,c \in R .$$

10. Умножение действительных чисел обладает свойством ассоциативности, т.е.

$$a(bc) = (ab)c \ \ \forall a,b,c \in R .$$

11. Для умножения справедливы правила знаков, т.е.

$$a(-b) = -(ab), \ (-a)(-b) = ab \ \ \forall a,b \in R .$$

12. Любое действительное число $a \neq 0$ имеет обратное, и притом единственное.
13. Для любого $a \neq 0$ $(-a)^{-1} = -(a^{-1})$, $(a^{-1})^{-1} = a$.
14. Для любых $a \neq 0$ и $b \neq 0$ $a^{-1} \cdot b^{-1} = (ab)^{-1}$.
15. Для дробей вида $\frac{a}{b}$ $a, b \in R$ и $b \neq 0$, справедливы обычные правила сложения, вычитания, умножения и деления.
16. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$; $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0$.

(Заметим, что здесь еще нет теоремы о пределе произведения.)

17. Если последовательность $\{x_n\}$ имеет конечный предел, то

$$\lim_{n\to\infty}(cx_n) = c\lim_{n\to\infty}(x_n) \ \ \forall c \in R .$$

18. Если $0 < a < 1$, то $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$.

19. Если $|q| < 1$, то последовательность $S_n = \sum_{k=1}^{n} q^k$, $n \in N$, сходится. Чему равен этот предел?
20. Если $a$ – периодическая десятичная дробь, то $a$ – рациональное число.
21. Если $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} = a$$

Справедливо ли обратное утверждение?

## § 5.
## Предел суммы, разности, произведения и частного

Пусть заданы две числовые последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$. Тогда последовательности с $n$-ми членами

$$x_n = a_n + b_n,\ y_n = a_n - b_n,$$
$$z_n = a_n b_n,\ u_n = a_n / b_n$$

называются соответственно суммой, разностью, произведением и частным данных последовательностей и обозначаются $\{a_n + b_n\}$, $\{a_n - b_n\}$, $\{a_n b_n\}$, $\{a_n / b_n\}$.

Доказывается, что если последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ имеют конечные пределы $a$ и $b$, то

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b,\ \lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab.$$

Если, кроме того, $b_n \neq 0\ \ \forall n$ и $b \neq 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

Последовательность называется бесконечно малой, если она сходится к нулю. Последовательность $\{x_n\}$ называют бесконечно большой и пишут $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$, если $\lim_{n\to\infty} |x_n| = +\infty$.

Доказать следующие утверждения.
1. Последовательность $\{x_n\}$ сходится к $x_0$ тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon : \forall n \geq N_\varepsilon\ \ x_n \in O_\varepsilon(x_0),$$

где $O(x_0)$ – ε-окрестность точки $x_0$, т.е. $O_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.
2. Сумма, разность и произведение бесконечно малых последовательностей тоже являются бесконечно малыми последовательностями. Справедливо ли аналогичное утверждение для частного бесконечно малых последовательностей?
3. Произведение бесконечно больших последовательностей есть бесконечно большая последовательность. Справедливы ли аналогичные утверждения для суммы, разности и частного двух бесконечно больших последовательностей?
4. Если $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, то $\lim_{n\to\infty} |b_n| = |b|$. Справедливо ли обратное утверждение?
5. Если $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $a \neq 0$ и $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$$

6. Если $n_k \in \mathrm{N}$ и $\lim_{k\to\infty} = +\infty$, то

$$\lim_{k\to\infty}(1+\frac{1}{n_k})^{n_k} = e.$$

7. Для любого $k \in \mathrm{N}$

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{k})^{kn} = e^k.$$

8. Последовательность $x_n = (1+\frac{k}{n})^n$, $n \in \mathrm{N}$, при любом $k \in \mathrm{N}$ монотонно возрастает и $\lim_{n\to\infty} x_n = e^k$.

9. Для любого $a > 1$ и любого целого $k$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n} = 0.$$

10. $\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} = 0 \quad \forall a \in R$

11. $\lim_{n\to\infty}\frac{n^k a^n}{n!} = 0 \quad \forall a \in R,\ \forall k \in R$.

12. $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n^2}}{n!} = +\infty$.

13. Если последовательность $\{a_n\}$ неограниченная, то последовательность $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ тоже неограниченная.

14. Найти пределы:

1) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$;

2) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}$;

3) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+3)}$.

## § 6.
## Степени и логарифмы

Напомним, что для любого числа $a \ge 0$ и любого $n \in \mathrm{N}$ число $x \ge 0$ такое, что $x^n = a$, называется арифметическим корнем $n$-й степени из $a$ и обозначается $\sqrt[n]{a}$ или $a^{\frac{1}{n}}$. Доказывается, что у любого неотрицательного числа существует арифметический корень $n$-й степени и притом только один.

Для любого $a > 0$ и любого рационального числа $r = p/n$, где $p$ целое, а $n$ – натуральное, число $(\sqrt[n]{a})^p$ называется степенью числа $a$ с показателем $r$ и обозначается $a^r$

Для любого $a > 0$ и любого $x \in R$, по определению,

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{(x)_n}$$

Пусть $b > 0$ и $b \ne 1$. Тогда для любого $a > 0$ число $c$ такое, что $b^c = a$, называется логарифмом числа $a$ по основанию $b$ и обозначается $\log_b a$. Так что, по определению, $b^{\log_b a} = a$.

Доказать следующие утверждения.

1. Уравнение $x^2 = a$ при любом $a > 0$ имеет точно два решения.
2. Уравнение $x^3 = a$ при любом $a \in R$ в множестве действительных чисел имеет только одно решение.
3. Если $r = p/n$ и $a > 0$, то $\sqrt[n]{a^p} = a^r$.
4. Для любого $a > 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.
5. Для любого $a > 0$ и любого $x \in R$
$$\lim_{n\to\infty} a^{(\bar{x})_n} = a^x.$$
6. Степень $2^{\sqrt{2}}$ существует.
7. Логарифм $\log_2 3$ существует.
8. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{x_n})^{x_n} = e$.
9. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, причем $x_0 > 0$ и $x_n > 0$ $\forall n$, то
$$\lim_{n\to\infty} x_n^\alpha = x_0^\alpha \quad \forall \alpha \in R.$$
10. $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(1 + \frac{1}{n}) = 0$.
11. $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{\alpha}{n})^n = e^\alpha$ $\forall \alpha \in R$.
12. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$ $\forall \alpha > 0$.
13. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, то
$$\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = a^{x_0} \quad \forall a > 0.$$
14. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, причем $x_0 > 0$ и $x_n > 0$ $\forall n$, то
$$\lim_{n\to\infty} \ln x_n = \ln x_0.$$
15. $\lim\limits_{n\to\infty} \log_a n = +\infty$ $\forall a > 1$.
16. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0$ $\forall a > 0$, $a \neq 1$.
17. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n^\alpha} = 0$ $\forall a > 1$ $\forall \alpha > 0$.
18. Если последовательность $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $n \in \mathrm{N}$, сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Справедливо ли обратное утверждение?
19. Если $a_n > 0$ $\forall n \in \mathrm{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, то
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} = a.$$
20. Если $a_n > 0$ $\forall n \in \mathrm{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$, то
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a.$$
21. Для любого $n \in \mathrm{N}$
$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e\left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

22. Для любого $n \in \mathrm{N}$

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

23. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

24. Если $a > 1$, то последовательность $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n^{\alpha}}$ сходится, а если $a \le 1$, то расходится.

## § 7.
## Принцип вложенных отрезков, теорема Больцано–Вейерштрасса и критерий Коши

Последовательность промежутков $\Delta_n$, $n \in \mathrm{N}$, называется последовательностью вложенных промежутков, если $\Delta_{n+1} \subset \Delta_n \ \ \forall n$.

**Принцип вложенных отрезков.** *У любой последовательности вложенных отрезков действительной прямой существует хотя бы одна общая точка.*

1. По аналогии с действительной прямой множество **Q** всех рациональных чисел называется рациональной прямой. Справедлив ли принцип вложенных отрезков для рациональной прямой?
2. Справедливо ли утверждение: у любой последовательности вложенных интервалов действительной прямой существует хотя бы одна общая точка?
3. Доказать, что для любой последовательности вложенных отрезков $\Delta_n$ множество $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Delta_n$ является отрезком.
4. Привести пример последовательности вложенных интервалов, имеющих одну общую точку.

**Теорема Больцано–Вейерштрасса**. *У любой ограниченной последовательности действительных чисел существует сходящаяся подпоследовательность.*

Предел любой подпоследовательности данной последовательности называется ее частичным пределом. Наибольший (наименьший) из частичных пределов последовательности $\{x_n\}$ называется верхним (нижним) пределом последовательности $\{x_n\}$ и обозначается $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ (соответственно $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$).

Доказать следующие утверждения.

5. Если $\{y_n\}$ – последовательность частичных пределов последовательности $\{x_n\}$, и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$, то $y_0$ – тоже частичный предел последовательности $\{x_n\}$.
6. Ограниченная последовательность сходится тогда и только тогда, когда она имеет единственный частичный предел.
7. Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ ограничены сверху, то
$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n + y_n) \le \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n.$$
8. Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ ограничены снизу, то
$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n + y_n) \ge \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \underline{\lim_{n\to\infty}} y_n.$$
9. Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ ограничены, то
$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n \le \overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n + y_n).$$
10. Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ была бесконечно малой, необходимо и достаточно, чтобы

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |x_n| = 0 .$$

11. Найти все частичные пределы последовательности

$$x_n = \frac{(-1)^n n}{2n+1},\ n \in \mathrm{N} .$$

12. Указать последовательность, для которой каждое натуральное число является частичным пределом.
13. Построить последовательность, для которой каждое $x \in [0;1]$ является частичным пределом.

Последовательность $\{x_n\}$ называется фундаментальной или сходящейся в себе, если она удовлетворяет условию Коши, т.е. если

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \mathrm{N}_\varepsilon : \forall n \ge \mathrm{N}_\varepsilon, \forall m \ge \mathrm{N}_\varepsilon\ \ |x_n - x_m| < \varepsilon .$$

**Критерий Коши**. Для того чтобы последовательность действительных чисел сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

Доказать следующие утверждения.

14. Последовательность $\{x_n\}$ действительных чисел сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists N : \forall n > N\ \ |x_n - x_N| < \varepsilon .$$

15. Если последовательность $\{a_k\}$ ограничена и $|q|< 1$, то последовательность $x_n = \sum_{k=1}^{n} a_k q^k, n \in \mathrm{N}$, сходится.
16. Последовательность $x_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$, $n \in \mathrm{N}$, расходится, причем $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$.
17. Последовательность $x_n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}$, сходится при любом $x \in R$.

## § 8.
## Множества точек числовой прямой

Множество $X \in R$ называется ограниченным сверху (снизу), если

$$\exists b : \forall x \in X\ \ x \le b \text{ (соответственно } x \ge b \text{)}.$$

Любое такое число $b$ называется верхней (нижней) гранью множества $X$.

Наименьшую из верхних граней множества $X$ обычно называют точной верхней гранью множества $X$ и обозначают $\sup X$, а наибольшую из нижних граней называют его точной нижней гранью и обозначают $\inf X$.

Если множество $X$ является неограниченным сверху (снизу), то, по определению, $\sup X = +\infty$ (соответственно $\inf X = -\infty$).

Доказать следующие утверждения.

1. У любого непустого множества действительных чисел, ограниченного сверху (снизу), в множестве **R** существует точная верхняя (нижняя) грань. Указать ограниченное множество рациональных чисел, у которого в множестве **Q** нет точной верхней (нижней) грани.
2. Если $M$ – множество всех частичных пределов последовательности $\{x_n\}$, то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \sup M\ \ \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \inf M .$$

3. Для любой последовательности $\{x_n\}$ последовательность $a_n = \inf_{k \ge n} x_k, n \in \mathrm{N}$, имеет предел и

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n.$$

Здесь $\inf_{k\ge n} x_k = \inf\{x_n, x_{n+1}, ...\}$

4. Для любой последовательности $\{x_n\}$ последовательность $b_n = \sup_{k\ge n} x_k, n \in \mathrm{N}$, имеет предел и

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n.$$

Совокупность некоторых множеств называется покрытием данного множества, если любая его точка принадлежит некоторому множеству этой совокупности.

**Лемма.** *Если некоторая совокупность интервалов покрывает заданный отрезок, то существует конечное число интервалов из этой совокупности, которые тоже покрывают данный отрезок.*

Коротко эту лемму формулируют так:

Из любого покрытия отрезка интервалами можно выделить конечное покрытие.

Справедливы ли следующие утверждения?

5. Из любого покрытия отрезка отрезками можно выделить конечное покрытие.
6. Из любого покрытия интервала интервалами можно выделить конечное покрытие.
7. Очевидно, что система интервалов $(n-0{,}1; n+0{,}1), n \in \mathrm{N}$, покрывает множество **N**. Можно ли из этой системы интервалов выделить конечное покрытие множества **N**?

Напомним, что два множества называются равномощными, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие. Множество, равномощное множеству **N** всех натуральных чисел, называется счетным.

Доказать следующие утверждения.

8. Множество всех конечных десятичных дробей счетно.
9. Множество **Q** всех рациональных чисел счетно.
10. Множество **R** всех действительных чисел несчетно.
11. Построит), взаимно однозначное соответствие между точками отрезков [0;1] и [$a$;$b$], где $a < b$.
12. Построить взаимно однозначное соответствие между точками отрезка [0;1] и интервала (0;1).
13. Построить взаимно однозначное отображение интервала (0;1) на прямую **R**.

Точка $x_0$ множества $G \subset R$ называется внутренней, если $\exists O(x_0) : O(x_0) \subset G$. Множество, у которого все точки внутренние, называется открытым. Пустое множество, по определению, считается открытым.

Точка $x_0 \in R$ называется предельной точкой множества $G \subset R$, если

$$\forall O(x_0)\ \exists x \in G : x \in O(x_0),\ x \ne x_0.$$

Множество называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки (если, конечно, они есть). Пустое множество, по определению, считается замкнутым.

Точка $x_0 \in R$ называется граничной точкой множества $G \subset R$, если в любой окрестности точки $x_0$ имеются хотя бы по одной точке из $G$ и **R**\\$G$. Множество всех граничных точек множества $G$ называется границей множества $G$ и обозначается $\partial G$.

Множество, которое получается из множества $G$ присоединением всех его предельных точек, называется замыканием множества $G$ и обозначается $\overline{G}$.

Точка $x_0$ множества $G \subset R$ называется изолированной, если у $x_0$ есть окрестность, в которой нет других точек из $G$, кроме $x_0$.

Доказать следующие утверждения.

14. Если множество $G \subset R$ замкнуто и ограничено, то среди его элементов есть как наименьший, так и наибольший.
15. Если множество $G \subset R$ открыто, то среди его элементов нет ни наименьшего, ни наибольшего.
16. Граница любого множества $G \subset R$ является замкнутым множеством.
17. Для любого $G \subset R$ $\overline{G} = G \cup \partial G$.
18. Замыкание любого множества есть замкнутое множество.
19. Объединение любого семейства открытых множеств открыто.
20. Пересечение любого конечного числа открытых множеств открыто. Справедливо ли это утверждение для счетного семейства множеств?
21. Множество $G \subset R$ открыто тогда и только тогда, когда множество $\mathbf{R} \backslash G$ замкнуто.
22. Для любых множеств $A \subset R$ и $B \subset R$

$$R \setminus (A \cup B) = (R \setminus A) \cap (R \setminus B),$$
$$R \setminus (A \cap B) = (R \setminus A) \cup (R \setminus B).$$

23. Объединение любого конечного числа замкнутых множеств замкнуто. Справедливо ли это утверждение для счетного семейства множеств?
24. Пересечение любого семейства замкнутых множеств замкнуто.
25. Может ли множество $G \subset R$, все точки которого изолированные, иметь предельные точки?
26. Является ли замкнутым или открытым множество всех рациональных точек отрезка [0;1]?
27. Привести пример множества $G \subset R$, которое одновременно и открытое, и замкнутое.

Как известно, для любого отрезка [*a*;*b*] число *b*–*a* называется его длиной, ту же длину имеет и любой из промежутков [*a*;*b*), (*a*;*b*], (*a*;*b*). Обобщением этого понятия на более широкий класс множеств $G \subset R$ является мера множества, которую для *G* будем обозначать $mG$.

Любой конечный промежуток $\Delta = (a;b]$ и любое множество *S*, являющееся объединением конечного числа попарно непересекающихся промежутков $\Delta_1, \ldots, \Delta_N$ такого вида, называются элементарными множествами. По определению положим

$$m\Delta = b - a, \; mS = \sum_{j=1}^{N} m\Delta_j .$$

Пустое множество тоже считается элементарным, причем $m\varnothing = 0$.

Для любого ограниченного множества $G \subset R$ рассмотрим числа

$$\underline{m} = \sup_{s \subset G} ms, \; m = \inf_{S \supset G} mS,$$

где sup берется по всем элементарным множествам $s \subset R$, а inf – по всем элементарным множествам $S \supset R$.

Если $\underline{m}G = \overline{G}G$, то это число называется мерой Жордана множества *G* и обозначается *mG*, а множество *G* называется измеримым по Жордану.

Доказать следующие утверждения.

28. Определение меры элементарного множества *S* не зависит от разбиения *S* на промежутки вида (*a*;*b*].
29. Если множества *s* и *S* элементарные, то множества $s \cup S$ и $s \cap S$ тоже элементарные и

$$m(s \cup S) + (s \cap S) = ms + mS.$$

Если, кроме того, *s* и *S* не пересекаются, то

$$m(s \cup S) = ms + mS.$$

30. Если множества s и S элементарные и $s \subset S$, то

$$m(S \setminus s) = ms - mS.$$

31. Для любого ограниченного множества $G \subset R$

$$0 \le \underline{m}G \le \overline{m}G < +\infty.$$

32. Если $\overline{\Delta} = [a;b]$, $\Delta^* = (a;b)$, то

$$m\overline{\Delta} = b - a, \ m\Delta^* = b - a.$$

33. Если множества G1 и G2 измеримы, то множества $G_1 \cup G_2$ и $G_1 \cap G_2$ тоже измеримы и

$$m(G_1 \cup G_2) + m(G_1 \cap G_2) = mG_1 + mG_2.$$

Если, кроме того, $G_1$ и $G_2$ не пересекаются, то

$$m(G_1 \cup G_2) = mG_1 + mG_2.$$

34. Если множества $g$ и $G$ измеримы и $g \subset G$, то множество $G \setminus g$ тоже измеримо и

$$m(G \setminus g) = mG - mg.$$

35. Для того чтобы ограниченное множество $G \subset R$ было измеримо, необходимо и достаточно, чтобы его граница $\partial G$ была измерима и $m\partial G = 0$.
36. Множество всех рациональных точек отрезка [0;1] является неизмеримым по Жордану.

# II
# Функции одной переменной

## § 1.
## Примеры числовых функций

Пусть заданы множество $X \subset R$ и некоторое правило $f$, которое каждому числу $x \in X$ ставит в соответствие некоторое число $y = f(x)$. Тогда множество всевозможных пар $(x;f(x))$, $x \in X$, называется числовой функцией и обозначается либо просто $f$, либо $f(x)$, либо $y = f(x)$, $x \in X$. Множество $X$ называется областью определения функции $f$ и обозначается $D_f$, а множество всех $y = f(x)$ называется множеством значений функции $f$ и обозначается $f(X)$.

Множество всех точек координатной плоскости с координатами $(x;f(x))$, $x \in X$, называется графиком функции $f$.

Числовую функцию $f$, определенную на $X$, иногда называют отображением множества $X$ в множество **R** или на множество $f(X)$. Тогда $y = f(x)$ называется образом точки $x$, а $x$ – прообразом точки $y$. Если $M \subset R$, то множество всех $y = f(x)$, когда $x \in M$ называется образом множества $M$ при отображении $f$ и обозначается $f(M)$.

Если задана функция $y = f(x)$, $x \in X$, то говорят, что переменная $y$ является функцией независимой переменной $x$, и, чтобы не вводить других обозначений, иногда пишут $y = y(x)$.

Числовую функцию часто задают просто формулой. Тогда под областью определения понимают так называемую естественную область определения, т.е. множество всех чисел, для которых заданная формула имеет смысл.

1. Найти области определения и множества значений следующих функций:

1) $y = \sqrt{x^2 - 1}$;

2) $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$;

3) $y=\sqrt{-(x-1)^2}$ ;

4) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ ;

5) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ ;

6) $y=\dfrac{1}{\sqrt{-(x-1)^2}}$ ;

7) $y=x-1, x\in[-1;1]$ ;

8) $y=|x-1|, x\in(0;1)$ ;

9) $y=x^2, x\in R$ ;

10) $y=\dfrac{x^2}{1+x^2}, x\in R$ .

2. Пусть $A$ и $B$ произвольные множества из области определения функции $f$. Доказать, что

$$f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)\,,\ f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)\,.$$

Можно ли здесь знак включения заменить на знак равенства?

Функция $f$, определенная на множестве $X$ , называется монотонно возрастающей (убывающей) на $X$, если для любых $x_1$ и $x_2$ из $X$ таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1)\le f(x_2)$ (соответственно $f(x_1)\ge f(x_2)$). Если же выполняются строгие неравенства, то функция $f$ называется строго возрастающей (убывающей) на $X$ .

Функция $f$, определенная на множестве $X$, называется ограниченной сверху (снизу) на $X$, если множество $f(X)$ ограничено сверху (снизу). Если же $f(X)$ ограничено, то и $f$ называется ограниченной на $X$.

3. Используя символы $\exists$ и $\forall$, сформулировать определения того, что функция $y = f(x)$, $x\in X$, является ограниченной сверху, неограниченной сверху, ограниченной снизу, неограниченной снизу, ограниченной, неограниченной.

Доказать следующие утверждения.

4. Функция $y = f(x)$, $x\in X$, ограничена на $X$ тогда и только тогда, когда

$$\exists M:\forall x\in X\ \ |f(x)|\le M\ .$$

5. Сумма, разность и произведение ограниченных функций – ограниченная функция. Что можно утверждать об их отношении?

6. Квадратичная функция $y=ax^2+bx+c$ при $a > 0$ строго возрастает на промежутке $\left[-\dfrac{b}{2a};+\infty\right)$ и строго убывает на промежутке $\left(-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right]$ а при $a < 0$ строго возрастает на $\left(-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right)$ и строго убывает на $\left[-\dfrac{b}{2a};+\infty\right)$.

7. Строго монотонная функция $y = f(x)$, $x\in X$, взаимно однозначно отображает множество $X$ на множество $f(X)$. Принести пример функции $f$, определенной на некотором промежутке $\Delta$ которая не является на $\Delta$ строго монотонной, но которая взаимно однозначно отображает $\Delta$ на $f(\Delta)$.

Функция $y = f(x)$, $x\in X$, называется обратимой на множестве $X$, если для любого $y\in f(X)$ уравнение $f(x) = y$ имеет единственное решение $x=\varphi(y)$. Тогда функция $\varphi(y)$, $y\in f(X)$, называется обратной к функции $f$ и обозначается $f^{-1}$.

Для заданных функций $f$ и $g$ функция, определяемая формулой $y = g(f(x))$, называется сложной функцией или композицией функций $f$ и $g$ и обозначается $gof$.

8. Доказать, что функция $y = \dfrac{x}{x+1}$ на области определения обратима, и найти обратную функцию.
9. Доказать, что функция $y = \sqrt{x}$ обратима, и найти обратную функцию.
10. Найти композиции $fog$ и $gof$, если
   1). $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$;
   2). $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $g(x) = \sqrt{1-x^2}$.
11. Пусть $B$ – некоторое множество значений функции $f$. Через $f^{-1}(B)$ обозначим полный прообраз множества $B$, т.е. множество всех $x \in D_f$ таких, что $f(x) \in B$. Доказать, что $f(f^{1}(B)) = B$. А как соотносятся множества $A \subset D_f$ и $f^{-1}(f(A))$?
12. Доказать, что

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B),$$
$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$

для любых подмножеств $A$ и $B$ множества значений функции $f$.

Для любого положительного числа $c \neq 1$ функция, заданная формулой $y = c^x$, называется показательной с основанием $c$, а функция $y = \log_c x$ – логарифмической с основанием $c$. Показательная функция с основанием $e$ называется экспонентой и обозначается $y = \exp x$.

Для любого числа $a \neq 0$ функция, заданная формулой у = $x^a$, называется степенной функцией с показателем а.

13. Найти области определения, множества значений и промежутки монотонности функции:

$$y = \log_2 x,\ y = \log_2 x^2,\ y = \log_x = 2,\ y = \log_3 x + \log_x 3;$$
$$y = 2^{1/x},\ y = 2^{|x|},\ y = 2^{1-x} - 2^{x-1}.$$

14. Доказать, что

$$\mathrm{sh}(x+y)=\mathrm{sh}x\,\mathrm{ch}y+\mathrm{ch}x\,\mathrm{sh}y,$$
$$\mathrm{ch}(x+y)=\mathrm{ch}x\,\mathrm{ch}y+\mathrm{sh}x\,\mathrm{sh}y,$$

где sh$x$ и ch$x$ – гиперболические синус и косинус.

Пусть на единичной окружности $C$ фиксирована некоторая точка $A$. Тогда каждой точке $\{(\underline{x})_n\}$ можно поставить в соответствие две дуги $AM$ и $MA$: $AM$ откладывается от $A$ против часовой стрелки, а $MA$ – по часовой стрелке. Каждому числу $\alpha \in [0;2\pi)$ поставим в соответствие дугу $AM_\alpha$, длина которой равна $\alpha$, а каждому $\alpha \in (-2\pi;0)$ – дугу $M_\alpha A$ длины $\alpha$. Если же $|\alpha| \geq 2\pi$ и $\alpha = \alpha_0 + 2n\pi$, где $|\alpha_0| < 2\pi$ и $n$ – целое, то положим $M_\alpha = M_{\alpha_0}$.

На плоскости, в которой лежит единичная окружность $C$, введем прямоугольную декартову систему координат так, чтобы начало координат совпало с центром окружности $C$, а точка $A$ имела координаты (1;0). Пусть $x_\alpha, y_\alpha$ – координаты точки $M_\alpha \in C$ в этой системе координат.

Для каждого $\alpha \in R$ число $x_\alpha$ называется косинусом $a$ и обозначается cos $a$, а число $y_a$ – синусом $a$ и обозначается sin $a$. Если $\cos a \neq 0$, то число $\frac{\sin a}{\cos a}$ называется тангенсом $a$ и обозначается tg $a$. Если же $\sin a \neq 0$. то число $\frac{\cos a}{\sin a}$ называется котангенсом $a$ и обозначается ctg $a$.

15. Что называется длиной дуги окружности? Доказать, что любая дуга окружности имеет конечную длину.
16. Доказать, что длина дуги окружности обладает свойством аддитивности, т.е. если $AB$ – дуга окружности, и $M \in \breve{AB}$, то $|\breve{AB}| = |\breve{AM}| + |\breve{MB}|$, где $|\breve{AB}|$ и т.д. – длины соответствующих дуг.
17. Что называется числом $\pi$? Доказать, что $3 < \pi < 4$.
18. Доказать, что $|\sin a| \leq |a| \quad \forall a \in R$.
19. Доказать, что tg $a \geq |a| \quad \forall a \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
20. Доказать, что если $0 < |a| < \frac{\pi}{2}$, то

$$\cos a \leq \frac{\sin a}{a} \leq 1.$$

Функции, заданные формулами $y$=sin$x$, $y$=cos$x$, $y$=tg$x$, и $y$=ctg$x$, называются тригонометрическими функциями, соответственно синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом. Функции, обратные к функциям

$$y=\sin x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right];$$

$$y=\cos x,\ x \in [0; \pi];$$

$$y=\mathrm{tg}\, x,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right);$$

$$y=\mathrm{ctg}\, x,\ x \in (0; \pi),$$

называются обратными тригонометрическими функциями и обозначаются соответственно arcsin $x$, arccos $x$, arctg $x$, arcctg $x$.

Доказать следующие утверждения.

21. Функция $y$=sin$x$обратима на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
22. Функция $y$=cos$x$ обратима на отрезке $[0; \pi]$.
23. Функция $y$=tg$x$ обратима на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
24. Функция $y$=ctg$x$ обратима на интервале $(0; \pi)$.
25. Последовательность $x_n = \sin\frac{n\pi}{4}$, $n \in \mathrm{N}$, расходится.
26. Последовательность $x_n = \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathrm{N}$, бесконечно малая.
27. Последовательность $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{2^k}$, $n \in \mathrm{N}$, сходится при любом $x \in R$.

28. Найти все частичные пределы последовательности $x_n = \cos\dfrac{n\pi}{3}$, $n \in \mathrm{N}$, в частности, найти $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ и $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$.

## § 2.
## Пределы функций

Пусть $c$ – число или бесконечно удаленная точка действительной прямой **R**, а $x_0$ – конечная или бесконечно удаленная предельная точка множества $X \subset R$.Точка $c$ называется пределом функции $f(x)$, $x \in X$, при $x \to x_0$ (или в точке $x_0$), если для любой последовательности $\{x_n\}$ такой, что

$$\forall n \;\; x_n \in X \,,\; x_n \neq x_0 \text{ и } x_n = x_0 \,,$$

последовательность $y_n = f(x_n)$, $n \in \mathrm{N}$, сходится к $c$. В этом случае пишут $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = c$, или "$f(x) \to c$ при $x \to x_0$."

Доказать следующие утверждения.

1. $\lim\limits_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0 \;\; \forall x_0 \in R$.
2. $\lim\limits_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0 \;\; \forall x_0 \in R$.
3. $\lim\limits_{x\to x_0} \mathrm{tg}x = \mathrm{tg}x_0$ для любого $x_0$ из области определения тангенса.
4. $\lim\limits_{x\to x_0} \mathrm{ctg}x = \mathrm{ctg}x_0$ для любого $x_0$ из области определения котангенса.
5. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$.
6. Функция $f(x)=\cos x$ не имеет предела при $x \to +\infty$.
7. Найти предел функции $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-2x}$ в точке $x$=2.

Дадим второе определение предела функции в точке. (Оно называется определением по Коши, а предыдущее определением по Гейне.)

Пусть $c$ – число или бесконечно удаленная точка прямой **R**, а $x_0$ – конечная или бесконечно удаленная предельная точка множества $X \subset R$.Точка $c$ называется пределом функции $f(x)$, $x \in X$, при $x \to x_0$, если

$$\forall O(c) \exists O(x_0) : \forall x \in \dot{O}(x_0) \cap X \;\;\; f(x) \in O(c) \,, (1)$$

где $\dot{O}(x_0)$ – проколотая окрестность точки $x_0$, т.е. $\dot{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$.

Доказывается, что определения предела функции по Гейне и по Коши эквивалентны.

Доказать следующие утверждения.

8. $\lim\limits_{x\to x_0} c^x = c^{x_0} \;\; \forall x_0 \in R$.
9. $\lim\limits_{x\to +\infty} c^x = +\infty \;\; \forall c > 1$.
10. $\lim\limits_{x\to -\infty} c^x = 0 \;\; \forall c > 1$.
11. Условие (1) для $x_0$ и $c$ из **R** равносильно условию:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : \;\; \forall x \in \dot{O}_\delta(x_0) \cap D_f \;\;\; f(x) \in O_\varepsilon(c) \,.$$

12 $\lim\limits_{x\to+0} x^a = 0 \ \ \forall a > 0$.

13. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^a = +\infty \ \ \forall a > 0$.

14. Пусть функция $f$ определена на множестве $A$, и пусть $x_0 \in R$ – предельная точка как для $X \cap (-\infty; x_0)$, так и для $X \cap (x_0; +\infty)$. Функция $f$ имеет предел в точке $x_0$ тогда и только тогда, когда у нее пределы в точке слева и справа существуют и равны.

## § 3.
## Непрерывные функции

Точки любого множества $X \in R$ делятся на предельные и изолированные. Функция $f(x)$, $x \in X$, называется непрерывной в предельной точке $x_0 \in X$, если $\lim\limits_{x\to x_0} = f(x_0)$ любой изолированной точке $x_0 \in X$ функция $f$, по определению, считается непрерывной.

Заметим, что если функция $f$ определена, например, на отрезке $[a;b]$ то можно говорить о непрерывности не только во внутренних точках отрезка, но и в его концевых точках.

Бели функция $f$ непрерывна в точке $x_0 \in D_f$, то $x_0$ называется точкой непрерывности функции $f$. В противном случае точка $x_0$ называется точкой разрыва функции $f$.

Доказать следующие утверждения.

1. Функция $f$, определенная в некоторой окрестности точки $x_0$, является непрерывной в точке $x_0$ тогда и только тогда, когда
$$\forall O(y_0) \exists O(x_0) : f(O(x_0)) \subset O(y_0), \ (1)$$
где $y_0 = f(x_0)$.
2. Условие (1) равносильно условию
$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 : f(O_\delta(x_0)) \subset O_\varepsilon(y_0).$$
3. Функция $y = x^a$ при любом $a \in R$ непрерывна в любой точке $x_0 > 0$.
4. Если функция непрерывна в точке, то она ограничена в некоторой окрестности этой точки.
5. Функция Дирихле
$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально,} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально,} \end{cases}$$
разрывна в каждой точке.
6. Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $\Delta$, то функция $f_+(x) = \max\{f(x);0\}$ тоже непрерывна на $\Delta$.
7. Если функции $f$ и $g$, определенные на интервале $\Delta$, непрерывны в точке $x_0 \in \Delta$, то функции
$$M(x) = \max\{f(x),g(x)\} \text{ и } m(x) = \min\{f(x),g(x)\}$$
тоже непрерывны в точке $x_0$.
8. Функция Римана
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ иррационально,} \\ 1/q, & \text{если } x \text{ рационально и } x = \dfrac{p}{q}, \end{cases}$$

где $p/q$ – несократимая дробь, является непрерывной в любой иррациональной точке и разрывна в любой рациональной точке.

9. Если функция $y = f(x)$, $x \in R$, непрерывна на **R**, то функция $y = |f(x)|$ тоже непрерывна на **R** Справедливо ли обратное утверждение?
10. Если функция $f$, определенная на промежутке $\Delta$, непрерывна на $\Delta$, то $f(\Delta)$ – тоже промежуток. Справедливо ли обратное утверждение?
11. Если функция $f$, определенная на отрезке $\Delta$, непрерывна на $\Delta$, то $f(\Delta)$ – тоже отрезок. Справедливо ли обратное утверждение?
12. Если функция $y = f(x)$ определена и строго монотонна в некоторой окрестности точки $x_0$, то обратная функция $x = \varphi(y)$ непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$.
13. Если функция $f$ определена и монотонна на промежутке $\Delta$ и $f(\Delta)$ – промежуток, то $f$ непрерывна на $\Delta$.
14. Если функция $f$ непрерывна на промежутке $[a;+\infty)$, и у нее существует конечный предел при $x \to +\infty$, то $f$ ограничена на $[a;+\infty)$.
15. Если функция $f$ непрерывна на интервале $(a;b)$, то для любого $c \in R$ множество всех $x \in (a;b)$ таких, что $f(x)<c$ ($f(x)>c$), открыто.
16. Если функция $f$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то для любого $c \in R$ множество всех $x \in [a;b]$ таких, что $f(x) \le c$ ($f(x) \ge c$), замкнуто.
17. Для того чтобы функция $f$, определенная на **R**, была непрерывна на **R**, необходимо и достаточно, чтобы прообраз любого замкнутой) (открытого) множества был замкнутым (соответственно открытым) множеством.
18. Любое непрерывное отображение $f$ отрезка $\Delta$ в себя имеет неподвижную точку, т.е. $\exists x \in \Delta : f(x) = x$.
19. Если функция $f(x)$, $x \in R$, непрерывна на **R** и периодическая с периодом $T$, то
$$\exists k : f\left(x_0 + \frac{T}{2}\right) = f(x_0).$$
20. Если функция $f(x)$, $x \in R$, удовлетворяет условию Липшица:
$$\exists k : |f(x_1) - f(x_2)| \le k|x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in R,$$
где $k < 1$, то уравнение $f(x) = x$ имеет, и притом единственное, решение.
21. Монотонная функция может иметь не более счетного числа точек разрыва.
22. Если непрерывная на отрезке $\Delta$ функция $f$ обратима, то $f$ монотонна на $\Delta$.
23. Найти все непрерывные на **R** функции $f$ такие, что
$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y) \quad \forall x, y \in R.$$
24. Найти все непрерывные на **R** функции $f$ такие, что
$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in R.$$
25. Найти все непрерывные на $(0;+\infty)$ функции $f$ такие, что
$$f(xy) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in (0;+\infty).$$
26. Найти все непрерывные на $(0;+\infty)$ функции $f$ такие, что
$$f(xy) = f(x)f(y) \quad \forall x, y \in (0;+\infty).$$

## § 4.
## Сравнение асимптотического поведения функций

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на множестве $X$, и пусть $x_0$ предельная точка множества $X$ (конечная или бесконечная). Говорят, что функция $f(x)$ есть $O$–большое от $g(x)$ при $x \to x_0$, и пишут $f(x) = O(g(x))$ при $x \to x_0$, если
$$\exists c > 0,\ \exists O(x_0) : |f(x)| \le c|g(x)| \quad \forall x \in \dot{O}(x_0).$$

Если $f$(x) = $O(g(x))$ и $g(x) = O(f(x))$ при $x \to x_0$, то функции $f(x)$ и $g(x)$ называются функциями одного порядка (или подобными функциями) при $x \to x_0$. В этом случае пишут: $f(x) \propto g(x)$ при $x \to x_0$.

Говорят, что функция $f(x)$ есть $o$-малое от $g(x)$ при $x \to x_0$, и пишут $f(x) = o(g(x))$ при $x \to x_0$, если существует функция $a(x)$, бесконечно малая при $x \to x_0$, такая, что $|f(x)| \le a(x)|g(x)|$ для любого $x \in X$ из некоторой проколотой окрестности $\dot{O}(x_0)$ точки $x_0$

Говорят, что функция $f(x)$ эквивалентна функции $g(x)$ при $x \to x_0$, и пишут $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$, если $f(x) - g(x) = o(g(x))$ при $x \to x_0$.

Доказать следующие утверждения.

1. Если $f(x) = O(g(x))$, а $g(x) = O(\varphi(x))$, при $x \to x_0$, то $f(x) = O(\varphi(x))$ при $x \to x_0$, т.е.

2. Если $f(x) = O(\varphi(x))$ и $g(x) = O(\varphi(x))$ при $x \to x_0$, то $f(x) + g(x) = O(\varphi(x))$ при $x \to x_0$ (теорема сложения).
3. Если $f(x) \propto g(x)$, а $g(x) \propto \varphi(x)$ при $x \to x_0$, то $f(x) \propto \varphi(x)$ при $x \to x_0$, т.е. отношение подобия обладает свойством транзитивности. Справедлива ли теорема сложения для отношения подобия?
4. Если $|f(x)|/|g(x)| \to k$ при $x \to x_0$, причем $0 < k < +\infty$, то $f(x) \propto g(x)$ при $x \to x_0$. Справедливо ли обратное утверждение?
5. Если $f(x)/g(x) \to 0$, при $x \to x_0$, то $f(x) = o(g(x))$ при $x \to x_0$.
6. Если $f(x) = O(g(x))$, а $g(x) = o(\varphi(x))$ при $x \to x_0$, то $f(x) = o(\varphi(x))$ при $x \to x_0$.
7. Если $f(x) = o(\varphi(x))$ и $g(x) = o(\varphi(x))$ при $x \to x_0$, то $f(x) \pm g(x) = o(\varphi(x))$ при $x \to x_0$.
8. Если $f(x) = o(\varphi(x))$, а $g(x) = O(\varphi(x))$ при $x \to x_0$, то $f(x)g(x) = o(\varphi^2(x))$ при $x \to x_0$.
9. Если $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$, то $g(x) \sim f(x)$ при $x \to x_0$.
10. Если $f(x) \sim g(x)$, а $g(x) \sim \varphi(0)$ при $x \to x_0$, то $f(x) \sim \varphi(x)$ при $x \to x_0$.
11. Если $f(x)/g(x) \to 1$ при $x \to x_0$, то $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$. Справедливо ли обратное утверждение?
12. Для того чтобы график функции $y = f(x)$, $x > a$, имел асимптоту при $x \to +\infty(-\infty)$, необходимо и достаточно, чтобы
$$\exists k, b : f(x) = kx + b + o(1)$$
при $x \to +\infty(-\infty)$.