Глава 5. Линейное программирование в исследовании систем управления

Исследование систем управления в части формализованных методов (т.е. нахождение оптимального способа действия в условиях определенных экономических ограничений) сводится к построению математических моделей и анализу их характеристик. Совокупность математических методов, позволяющих проводить такой анализ, образует раздел математики, называемый математическим программированием [4],[5],[7].

Построение математической модели означает определение целевой функции $Z = f(\vec{x}), \vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и множества Ω, на котором она задана: $\vec{x} \in \Omega$. Множество Ω называется областью допустимых планов задачи.

Тот план, на котором целевая функция достигает своего наибольшего (наименьшего) значения, – оптимальный план, т.е. решение задачи. Методы нахождения оптимального плана зависят от конкретного вида функции $f(x)$ и множества Ω. Вот почему математическое программирование состоит из нескольких разделов. В этой теме затрагивается один из них – линейное программирование.

Линейным программированием называется раздел математического программирования, который занимается изучением линейных моделей. Это означает, что целевая функция $Z = f(\vec{x}), \vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ представляет собой линейную функцию и множество Ω задается линейными уравнениями и неравенствами:

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + ... + a_{kn}x_n = b_k, k \geq 0;\\
&a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + ... + a_{k+1,n}x_n \leq b_{k+1};\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + ... + a_{\ln}x_n \leq b_l, l \geq k;\\
&a_{l+1,1}x_1 + a_{l+1,2}x_2 + ... + a_{l+1,n}x_n \geq b_{l+1};\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \geq b_m, m \geq l;\\
&x_{j1} \geq 0, x_{j2} \geq 0, ..., x_{jp} \geq 0
\end{aligned} \tag{5.1}$$

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n + c_0 \to \max(\min) \tag{5.2}$$

Здесь $c_0, c_j, a_{ij} \in R (i = 1, ..., m, j = 1, ..., n), j_1, j_2, ..., j_p$ – некоторые из чисел 1, 2, … , n: $\{j_1, j_2, ..., j_p\} \subset \{1, 2, ..., n\}$.

Ограничения (5.1) при $k = 0$ не содержат уравнений, при $l = k$ не содержат неравенств вида $\leq$, при $m = l$ не содержат неравенств вида $\geq$. Задача (5.1)-(5.2) называется общей задачей линейного программирования.

Задача (5.1)-(5.2) называется стандартной задачей линейного программирования, если $k=0$, $m=l$ (т.е. все ограничения (5.1) имеют вид неравенств $\le$), $p=n$ (т.е. условие неотрицательности наложено на все переменные), $c_0=0$ (т.е. в целевой функции (5.2) нет свободного члена).

Приведем различные типы экономических задач, математическая постановка которых представляет собой разные варианты линейных моделей.

5.1. Задача об ассортименте продукции

Кондитерская фабрика вырабатывает и продает печенье и торты. Для изготовления каждого вида продукции фабрика использует сахар, яйца, муку (предположим, что все остальные ингредиенты имеются в избытке и поэтому не рассматриваются). Известны затраты каждого ресурса на производство 1 кг выпечки, прибыль от продажи 1 кг продукции и количество ресурсов, которыми фабрика располагает на один день (Таблица 5.1).

Таблица 5.1

Ресурсы	Изделие, расход на 1 кг		Дневной запас ресурса
	Печенье	Торты	
Сахар	0,4 кг	0,4 кг	120 кг
Яйца	3 шт.	5 шт.	1500 шт.
Мука	0,5 кг	0,25 кг	100 кг

Прибыль от реализации 1 кг печенья составляет 3 у.е., а от реализации 1 кг торта – 6 у.е. Требуется составить дневной план выпуска продукции, при котором фабрика получит наибольшую прибыль.

Математическая формулировка задачи. Главным моментом построения математической модели является идентификация *переменных* (искомых величин данной задачи). Далее следует определить *ограничения* на переменные, которые диктуются условиями исходной задачи. Эти ограничения и зададут множество Ω. Теперь нужно определить *цель*, для достижения которой из всех *допустимых* значений переменных нужно выбрать те, которые будут соответствовать *оптимальному* (наилучшему) решению задачи. Формулировка этой цели на математическом языке и приведет к построению *целевой функции*.

Пусть x_1 – количество (в килограммах) печенья, выпускаемого фабрикой в день, x_2 – количество (в килограммах) тортов, выпускаемых фабрикой в день.

Тогда количество сахара, расходуемого фабрикой в день: $0{,}4x_1+0{,}4x_2$. Это значение не должно превышать имеющийся у фабрики дневной запас сахара в 120 кг. Количество яиц, расходуемое в день: $3x_1+5x_2$. Но их дневной запас 1500 шт. Количество муки, необходимое на день: $0{,}25x_1+0{,}5x_2$. В наличии имеется 100 кг муки на день.

Очевидны следующие ограничения:

$$0{,}4x_1 + 0{,}4x_2 \le 120; 3x_1 + 5x_2 \le 1500; 0{,}5x_1 + 0{,}25x_2 \le 100,$$

где $x_j \ge 0, j = 1{,}2$ (условие неотрицательности переменных). Прибыль за сутки составит $3x_1 + 6x_2$ у.е., и ее, естественно, нужно максимизировать. Таким образом, целевая функция имеет вид $Z = 3x_1 + 6x_2 \to \max$.

5.2. Задача о диете

Для поддержания здоровья собаку следует кормить мясом и овсянкой. В среднем в день собака съедает 2 кг пищи. При этом кормовой рацион должен удовлетворять определенным требованиям по питательности. Ограничиваясь, для простоты, только тремя компонентами – белками, жирами и углеводами, – можно сказать, что дневной рацион собаки должен содержать: не менее 20% белков, не менее 10%, но не более 40% жиров, не менее 30% углеводов.

В таблице 5.2 приведены данные по содержанию питательных веществ в каждом виде корма и стоимость его 1 кг.

Таблица 5.2

Корм	Компоненты, на 1 кг		Углеводы, на 1 кг	Стоимость, у.е.
	Белки	Жиры		
Мясо	0,25	0,15	0,35	5
Овсянка	0,08	0,04	0,6	2

Сколько мяса и сколько овсянки должна получать собака в день, чтобы были соблюдены все требования по питательности пищи, а затраты на ее содержание при этом были минимальны?

Математическая формулировка задачи. Выберем переменные: x_1 - содержание мяса (в кг) в дневном рационе собаки, x_2 - содержание овсянки (кг) в дневном рационе собаки.

Теперь приступим к выводу ограничений. Общий вес дневной пищи составляет $x_1 + x_2$ кг, и это значение должно равняться 2 кг. Заметим, что если оптимальное решение будет соответствовать расходу пищи, строго равному 2 кг (в день), ограничение, представленное в виде неравенств $x_1 + x_2 \ge 2$ не будет препятствовать получению такого решения.

Теперь вспомним о требованиях, предъявляемых к пище с точки зрения ее питательности.

Содержание белков в дневном рационе $0{,}25x_1 + 0{,}08x_2$ должно быть не менее $0{,}25x_1 + 0{,}08x_2 \ge 0{,}2(x_1 + x_2)$. Жиров должно быть не менее 10%: $0{,}15x_1 + 0{,}04x_2 \ge 0{,}1(x_1 + x_2)$, но и не более 40%: $0{,}15x_1 + 0{,}04x_2 \le 0{,}4(x_1 + x_2)$.

Углеводов требуется не менее 30%: $0,35x_1 + 0,6x_2 \geq 0,3(x_1 + x_2)$. Эти ограничения можно упростить, объединив в левых частях неравенств члены, содержащие x_1 и x_2:

$$x_1 + x_2 \geq 2; 0,05x_1 - 0,12x_2 \geq 0; 0,05x_1 - 0,06x_2 \geq 0; 0,25x_1 + 0,36x_2 \geq 0;$$

$$0,05x_1 + 0,3x_2 \geq 0,$$

где $x_j \geq 0, j = 1,2$ (условие неотрицательности переменных).

Завершается построение математической модели данной задачи минимизацией расходов по поддержанию отменного здоровья собаки

$$Z = 5x_1 + 2x_2 \to \min.$$

5.3. Задача по планированию работы автобусного парка

Сбор и обработка необходимой информации показали, что минимальное количество автобусов, которое может удовлетворить потребности в перевозках пассажиров по данному маршруту в микрорайоне, существенно меняется в течение суток. Их количество можно считать величиной постоянной в пределах следующих четырехчасовых интервалов:

6:00 – 10:00	10:00 –14:00	14:00-18:00	18:00 –22:00	22:00 – 2:00
10 авт.	4 авт.	6 авт.	12 авт.	4 авт.

В период с 2:00 до 6:00 автобусы не требуются. Также установлено, что с учетом затрат времени на текущий ремонт и обслуживание непрерывное использование автобуса на линии должно продолжаться только по 8 час в сутки.

Требуется определить количество автобусов в каждой из смен, при учете, что оно должно быть не меньше минимальной потребности в них, а также, чтобы общее количество автобусов, выходящих на линию в течение суток, было минимальным.

Математическая формулировка задачи. Заметим, что если ориентироваться на общепринятый восьмичасовой график работы 6:00 – 14:00; 14:00 – 22:00; 22:00 – 6:00, очевидно, что в первой смене должно работать не меньше 10 автобусов; во второй – не меньше 12 автобусов: а в третьей – не меньше 4 автобусов. Итого, минимальное количество автобусов, задействованных в течение суток, будет равняться 10+12+4=26.

Однако более выгодным может оказаться график работы с накладывающимися друг на друга сменами. Например, рассмотрим следующий график работы автобусов. Пусть x_1 - число автобусов, выходящих на линию в 6:00, x_2 - число автобусов, выходящих на линию в 10:00, x_3 - число автобусов, выходящих на линию в 14:00, x_4 - число автобусов, выходящих на линию в 18:00, x_5 - число автобусов, выходящих на линию в 22:00, x_6 - число автобусов, выходящих на линию в 2:00. Тогда математическая модель будет представлена следующими ограничениями:

$$x_1 + x_6 \ge 10; x_1 + x_2 \ge 4; x_2 + x_3 \ge 6; x_3 + x_4 \ge 12; x_4 + x_5 \ge 4; x_5 + x_6 \ge 0,$$

$x_j \ge 0,\ j = 1,2,...,6$ и целевой функцией $Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \to \min$.

Отметим, что предпоследнее неравенство в системе неравенств выполняется автоматически, следовательно, его можно исключить. Анализ данной модели приводит к следующему оптимальному решению: для перевозок требуется только 22 автобуса. Таким образом, варьирование выбора начала смен позволяет существенно улучшать решение задачи, а именно, уменьшать суточную потребность в автобусах.

5.4. Задача о раскрое или минимизации обрезков

Ателье по пошиву женских кожаных курток располагает кусками кожи определенного размера. Для модели, которая шьется в этом сезоне, требуется две детали типа А, три детали типа В и четыре детали типа С. В результате анализа всех возможных способов раскроя материала были получены пять разных вариантов, схематически представленных на рис. 1.1.

Первый вариант (16 $дм^2$)

A	B	******* *******

Второй вариант (8 $дм^2$)

B	C C	***** *****

Третий вариант (0 $дм^2$)

A	C C

Четвертый вариант (24 $дм^2$)

B	B	****************** ******************

Пятый вариант (8 $дм^2$)

A	A	* *

Рис.5.1. *Пять вариантов раскроя кожи*

Часть, обозначенная звездочками, представляет собой отходы. На деталь А уходит 40 $дм^2$ кожи, на деталь В – 32 $дм^2$ кожи и деталь С – 24 $дм^2$ кожи. Ателье имеет заказ на 100 курток. Требуется найти сочетание вариантов раскроя кожи, при котором имеющийся заказ будет удовлетворен с минимальными потерями.

Математическая формулировка задачи. Определим переменные следующим образом: $x_j, j = 1,2,...,5$ - количество кусков кожи, раскроенных по j - му варианту. Тогда получим: деталей типа А $x_1 + x_3 + 2x_5$ штук, типа В $x_1 + x_2 + 2x_4$ штук и типа С $2x_2 + 2x_3$ штук.

Обозначим через y_1, y_2, y_3 избыточное количество деталей А, В, С соответственно. Тогда

$$y_1 = x_1 + x_3 + 2x_5 - 200; y_2 = x_1 + x_2 + 2x_4 - 300; y_3 = 2x_2 + 2x_3 - 400.$$

Общее выражение для суммарной величины потерь кожи (в единицах площади) будет иметь следующий вид:

$$16x_1 + 8x_2 + 24x_4 + 8x_5 + 40y_1 + 32y_2 + 24y_3.$$

Таким образом, имеем следующую математическую модель:

$$x_1 + x_3 + 2x_5 - y_1 = 200; x_1 + x_2 + 2x_4 - y_2 = 300; 0x_1 + 2x_2 + 2x_3 - y_3 = 400;$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,...,5; y_k \geq 0, k = 1,2,3.$$

$$Z = 16x_1 + 8x_2 + 24x_4 + 8x_5 + 40y_1 + 32y_2 + 24y_3 \to \min$$

Эта и подобные ей задачи решаются с помощью разных методов линейного программирования (графического, симплекс-метода и др.). В настоящее время решение реализовано на основе применения электронных таблиц MS Excel.

5.5. Задачи линейного программирования для самостоятельного решения

Задача 1. На одном из предприятий в специализированных бассейнах разводят на продажу два вида рыб - карпов и окуней. При этом используются два вида корма: k_1 и k_2. Средняя масса карпа составляет 2 кг, окуня – 1 кг. Карп в среднем потребляет 1 единицу корма k_1 и 3 единицы корма k_2 в день, окунь – 2 единицы корма k_1 и 1 единицу корма k_2. Ежедневный запас корма k_1 составляет 500 единиц, корма k_2 - 900 единиц. В каком количестве следует разводить каждый вид рыбы, чтобы максимизировать их общую массу? При этом, чтобы выполнить имеющийся заказ, окуней должно быть не менее 50 .

Ответ: $x_1 = 200, x_2 = 120, Z_{\max} = 640.$

Задача 2. Фирма «Русский чайный дом» производит и продает две марки чая – «Боярский» и «Купеческий». Для их изготовления используются одни и те же сорта чая в разных пропорциях, указанных в таблице 5.3. В этой же таблице указаны дневные запасы ингредиентов.

Таблица 5.3

Ингредиент (чай)	Сорт		Запас на день, кг
	«Боярский»	«Купеческий»	
Цейлонский	0,6	0,3	54
Индийский	0,3	0,2	48
Грузинский	0,1	0,5	36

Составить дневной план выпуска продукции, при котором прибыль фирмы будет максимальной, если прибыль от реализации 1 кг «Боярского» чая составляет 18 у.е., а от реализации «Купеческого» - 14 у.е.

Ответ: $x_1 = 60, x_2 = 60, Z_{\max} = 1920$.

Задача 3. В ресторанах «McDonald's» был проведен конкурс на самую популярную продукцию. Наибольшее признание получили два вида сендвичей: чизбургеры и гамбургеры. Для приготовления сендвичей требуется горчица, кетчуп, мясо, и сыр в пропорциях, которые указаны в таблице 5.4.

Таблица 5.4

Ингредиент	Чизбургер	Гамбургер	Запас ресурсов на 1 ч
Горчица	0,6 мл	0,6 мл	27 мл
Кетчуп	8 мл	5 мл	300 мл
Мясо	40 г	65 г	2600 г
Сыр	15 г	0	450 г

Прибыль от реализации одного чизбургера составляет 20 у.е., а от реализации гамбургера 15 у.е. Какое количество сендвичей каждого вида нужно изготавливать в час, чтобы прибыль ресторана была максимальной? При этом нужно учесть, что для обеспечения ассортимента сендвичей каждого вида необходимо изготавливать не менее 15 шт. в час.

Ответ: $x_1 = 25, x_2 = 20, Z_{\max} = 800$.

Задача 4. Предприятие по производству сплавов цветных металлов специализируется на производстве латуни и нейзильберов. Затраты ресурсов на изготовление каждого сплава, их дневной запас и прибыль от продажи одной тонны сплава представлены в таблице 5.5.

Таблица 5.5

Ресурсы	Латунь на 1 т	Нейзильберы на 1 т	Дневной запас ресурса, т
Медь	0,50	0,75	8,25
Никель	0,04	0,10	1,00
Цинк	0,45	0,25	5,00

Прибыль от реализации 1 т латуни составляет 600 у.е., а 1 т нейзильберов – 1120 у.е. Составить дневной план выпуска продукции, при котором предприятие получит максимальную прибыль.

Ответ: $x_1 = 3,75, x_2 = 8,5, Z_{\max} = 11770$.

Задача 5. Фармацевтическая фирма для изготовления двух видов сердечных препаратов использует три полуфабриката: фенотерол, динатрий, эналаприл. Их дневной запас составляет 400, 1500 и 900 кг соответственно. В результате смешивания этих трех компонентов в пропорции 1:3:1 получают сердечный препарат «энап», а при смешивании в пропорции 1:5:3 – сердечный препарат «энвас».

Прибыль от реализации 1 кг энапа составляет 300 у.е., а от реализации 1 кг энваса – 400 у.е. Определить дневной план выпуска продукции, при котором фирма получит максимальную прибыль.

Ответ: $x_1 = 250, x_2 = 150, Z_{\max} = 135000.$

Задача 6. Комбинат по переработке фруктово-ягодной продукции производит мармелад и фруктовый концентрат. Для изготовления каждого вида продукции необходимы вода, сахар и фрукты. Пропорции, в которых они используются, указаны в таблице 5.6. Прибыль от реализации 1 т мармелада равна 7 у.е., а от реализации 1 т фруктового концентрата – 10 у.е. Сколько тонн мармелада и фруктового концентрата должен выпускать комбинат, чтобы получить максимальную прибыль?

Таблица 5.6

Ресурсы	Мармелад, т	Фруктовый концентрат, т	Дневной запас ресурса, т
Вода	0,5	1	6
Сахар	1	1	8
Фрукты	2	1	14

Ответ: $x_1 = 4, x_2 = 4, Z_{\max} = 68.$

Задача 7. В результате проведенного технико-экономического анализа на пивоваренном заводе выяснилось, что разработка, производство и продвижение на рынке большого ассортимента пива «съедают» громадную часть прибыли.

Проведя маркетинговое исследование потребительского спроса, руководство завода пришло к выводу, что большинство потребителей предпочитают давно известные, привычные сорта пива. Было принято решение о дальнейшем выпуске только двух сортов пива – «С» и «П». Для производства пива требуются солод, хмель и вода (таблица 5.7).

На основе имеющихся данных о затратах каждого ресурса на 1 л пива перед экономистами завода была поставлена задача рассчитать дневной план выпуска продукции, при котором предприятие получит наибольшую прибыль. При этом прибыль от реализации 1 л пива сорта «С» составляет 10 у.е., а от реализации 1 л пива сорта «П» − 12 у.е.

Таблица 5.7

Ресурсы	«С»	«П»	Дневной запас ресурса, л
Солод	0,3	0,4	800
Хмель	0,1	0,2	400
Вода	0,6	0,4	1000

Ответ: $x_1 = 666$ и $2/3, x_2 = 1500, Z_{\max} = 24666$ и $2/3$.

Задача 8. Экспериментальная лаборатория «Эвента» в качестве новейшей разработки начала выпуск и продажу опытной партии образцов – крема для быстрого роста ногтей и крема для тела, способствующего снижению веса. Для изготовления каждого уникального крема используются активные вещества – гиалурон, карбопол и аллантоин (остальные ингредиенты имеются в избытке). Поскольку партия является опытной, дневной запас ресурсов невелик. Затраты каждого ресурса на изготовление одного флакона крема и количество ресурсов, которыми лаборатория располагает на один день, приведены в таблице 5.8. Прогнозируемая прибыль от продажи одного флакона крема для тела составляет 6 у.е., а от продажи одного флакона крема для ногтей – 5 у.е.

Таблица 5.8

Ресурс	Крем для тела, г	Крем для ногтей, г	Дневной запас ресурса, г
Гиалурон	1	1	5
Карбопол	3	2	12
Аллантоин	5	1	15

Необходимо составить дневной план выпуска продукции, при котором лаборатория получит наибольшую прибыль.

Ответ: $x_1 = 2, x_2 = 3, Z_{\max} = 27$.

Задача 9. На конезаводе «Восход» занимаются племенной работой по разведению двух пород лошадей – чистокровной верховой и тракененской. Для обеспечения нормальных условий выращивания лошадей они должны получать в день определенное количество кормов (таблица 5.9). Также в таблице указано общее количество корма каждого вида, которым конезавод располагает на день. Прибыль от реализации лошади породы «чистокровная верховая» составляет 1600 у.е., а от реализации лошади породы «тракененская» – 1200 у.е.

Таблица 5.9

Корма	Чистокровная верховая, кг	Тракененская, кг	Дневной запас корма, кг
Сено	2	3	180
Овес	4	1	240
Ячмень	6	7	426

Сколько лошадей каждой породы нужно выращивать, чтобы прибыль конезавода была максимальной?

Ответ: $x_1 = 57, x_2 = 12, Z_{\max} = 105600.$

Задача 10. Горнолыжный курорт предоставляется на определенное время для тренировок олимпийской сборной, а в остальное время открыт для любительского катания. Он работает ежедневно с 10 часов до 22 часов. Мощность местной электростанции такова, что она вырабатывает электроэнергию на сумму не более 1 000 у.е. в неделю, из которой 100 у.е. необходимо затрачивать на освещение.

Остальные средства идут на работу подъемников. Во время тренировок сборной на склоне работает один подъемник, который затрачивает электроэнергию на 5 у.е. в час, для коммерческого катания (в среднем количество катающихся составляет 50 человек) запускается четыре аналогичных подъемника.

Среди отдыхающих 100% пользуются подъемником, прибыль от которого составляет 4 у.е. в час с каждого катающегося , 60% берут на прокат снаряжение, что приносит прибыль 3 у.е. в час за комплект, 10% нанимают инструктора, что приносит курорту еще по 5 у.е. дохода в час с каждого обучающегося.

Рассчитать, какое количество часов в неделю склон должен быть предоставлен олимпийской сборной и какое - должен быть открытым для любительского катания, если сборная платит за аренду склона 105 у.е. в час (в цену включен подъемник) и ей необходимо для тренировок не менее 20 часов в неделю. Прибыль от работы горнолыжного курорта должна быть максимально возможной.

Ответ: $x_1 = 52, x_2 = 32, Z_{\max} = 15540.$

Глава 6. Исследование процессов управления на основе сетевых методов

Одним из эффективных способов представления и управления сложными процессами являются методы сетевого планирования и управления (СПУ) [2],[3],[6].

Методы СПУ применяются в различных сферах: при проведении маркетинговых исследований, проектировании опытно-конструкторских разработок, освоении опытного и серийного производств продукции, управлении строительством объектов, разработке бизнес-планов и проектов, реструктуризации действующего производства, подготовке различных категорий персонала, управлении инновационной деятельностью и т. п.

В основе СПУ лежит сетевая модель, графическое представление которой называется *сетевым графиком*. Сетевая модель представляет собой план выполнения некоторого комплекса взаимосвязанных работ (операций), заданного в виде сети, в которой отражаются все логические и хронологические взаимосвязи и результаты выполняемых работ, необходимые для достижения конечной цели планирования.

Сетевой график указывает виды работ, их последовательность, а также время их выполнения, необходимые для окончания всех видов деятельности не позже заданного или планируемого срока.

Основными элементами сетевой модели являются виды работ и события.

Работа представляет собой выполнение некоторого мероприятия, например, выполнение определенной технологической, управленческой или других операций. Работа связана с затратами времени и ресурсов, она должна иметь начало и конец. На сетевом графике работа изображается стрелкой. *Событиями* называют начальные и конечные точки работы, например, начало или окончание производственной операции.

Предполагается, что событие не имеет продолжительности и не требует затрат ресурсов. Событие может начаться только тогда, когда закончатся все работы, ему предшествующие. Последующие работы могут начаться только тогда, когда событие свершится. События на графике изображаются кружками. Выделяют исходное и завершающее события. Исходное событие не имеет предшествующих работ и событий. Завершающее событие не имеет последующих работ и событий.

6.1. Построение и расчет сетевой модели

Сетевой график формируется на начальном этапе планирования процесса.

Вначале планируемый процесс разбивается на отдельные работы, составляется перечень работ и событий, продумываются их логические взаимосвязи и последовательность выполнения. Работы закрепляются за ответственными исполнителями, с помощью которых оценивается длительность каждой работы. Затем составляется сетевой график. После упорядочения сетевого графика рассчитываются параметры событий и работ. Далее проводятся анализ и оптимизация сетевого графика, который при необходимости строится заново с пересмотром параметров событий и работ. При построении сетевого графика необходимо соблюдать ряд правил:

1. В сетевой модели не должно быть событий, из которых не выходит ни одна работа (дуга), за исключением завершающего события.
2. В сетевой модели не должно быть событий, в которые не входит ни одна работа (дуга), за исключением исходного события.
3. В сети не должно быть замкнутых контуров и петель, т.е. путей, соединяющих некоторые события с ними самими.
4. Любые два события должны быть непосредственно связаны не более, чем одной работой.
5. В сети рекомендуется иметь одно исходное и одно завершающее событие.

Если в составленной сети указанные правила не соблюдаются, то целесообразно обеспечить их выполнение с помощью введения фиктивных работ и событий.

Каждая работа кодируется индексом с номерами событий, между которыми она заключена. Совершение события зависит от окончания самой длинной из всех входящих в него работ. Последовательные работы и события формируют пути, которые ведут от исходного события к завершающему. Полный путь − любой путь, начало которого совпадает с исходным событием сети, а конец – с завершающим. Наиболее продолжительный полный путь в сетевой модели называется критическим. Он определяет время выполнения проекта в целом. Основные задачи сетевого планирования – нахождение критического пути и определение возможностей его сокращения (оптимизации).

При анализе сетевых моделей прежде всего вычисляют их временные параметры. К основным временным параметрам относятся продолжительность критического пути (критический срок), резервы времени событий и резервы времени работ.

Критический путь − это наиболее протяженный по времени полный путь; его продолжительность и определяет критический срок (t_{kp}). Критических путей на сетевом графике может быть несколько.

Ранний срок $t_p(j)$ свершения события j − это самый ранний момент, к которому завершаются все работы, предшествующие этому событию:

$$t_p(j) = \max(t_p(i) + t(i,j)); (i,j) \in U_j^+, \tag{6.1}$$

где U_j^+ − множество работ, заканчивающихся j-м событием; $t_p(i)$ − ранний срок свершения начального события работы (i,j); $t(i,j)$ − продолжительность работы $t(i,j)$. Предполагается, что $t_p(I)=0, t_p(S)=t_{kp}$, где I,S − исходное и завершающее события, соответственно.

Поздний срок $t_n(i)$ свершения события i − такой предельный момент, после которого остается ровно столько времени, сколько необходимо для выполнения всех работ, следующих за этим событием:

$$t_n(i)=\min(t_n(j)-t(i,j));(i,j)\in U_i^-, \quad (6.2)$$

где U_i^- − множество работ, начинающихся i-м событием; $t_n(j)$ − поздний срок свершения конечного события работы (i,j). Для завершающего события S предполагается, что $t_n(S)=t_p(S)=t_{kp}$.

Резерв времени $R(i)$ события i показывает, на какой предельно допустимый срок может задержаться свершение события i без нарушения срока наступления завершающего события:

$$R(i)=t_n(i)-t_p(i). \quad (6.3)$$

Ранний срок начала работы (i,j):

$$t_{p.n}(i,j)=t_p(i). \quad (6.4)$$

Ранний срок окончания работы (i,j):

$$t_{p.o}(i,j)=t_p(i)+t(i,j). \quad (6.5)$$

Поздний срок начала работы (i,j):

$$t_{n.n}(i,j)=t_n(j)-t(i,j). \quad (6.6)$$

Поздний срок окончания работы (i,j):

$$t_{n.o}(i,j)=t_p(j). \quad (6.7)$$

Ранний срок свершения события j часто находят по формуле

$$t_p(j)=\max t_{p.o}(i,j);(i,j)\in U_j^+ \quad (6.8)$$

а поздний срок свершения события i − по формуле

$$t_n(i)=\min t_{n.n}(i,j);(i,j)\in U_i^- \quad (6.9)$$

Полный резерв времени $R_n(i,j)$ работы (i,j) − это максимальный запас времени, на которое можно задержать начало работы или увеличить ее продолжительность при условии, что весь комплекс работ будет завершен в критический срок:

$$R_n(i,j)=t_n(j)-t_p(i)-t(i,j)=t_n(j)-t_{p.o}(i,j) \quad (6.10)$$

Свободный резерв времени $R_c(i,j)$ работы (i,j) − это максимальный запас времени, на которое можно отсрочить или (если она началась в свой ранний срок) увеличить ее продолжительность при условии, что не нарушатся ранние сроки начала всех последующих работ:

$$R_c(i,j) = t_p(j) - t_p(i) - t(i,j) = t_p(j) - t_{p.o}(i,j) \qquad (6.11)$$

Критические работы, как и критические события, резервов не имеют.

Методику расчетов сети проиллюстрируем на примере сетевого графика, изображенного на рис. 6.1. Здесь каждый кружок, моделирующий событие, разделен диаметрами на четыре сектора.

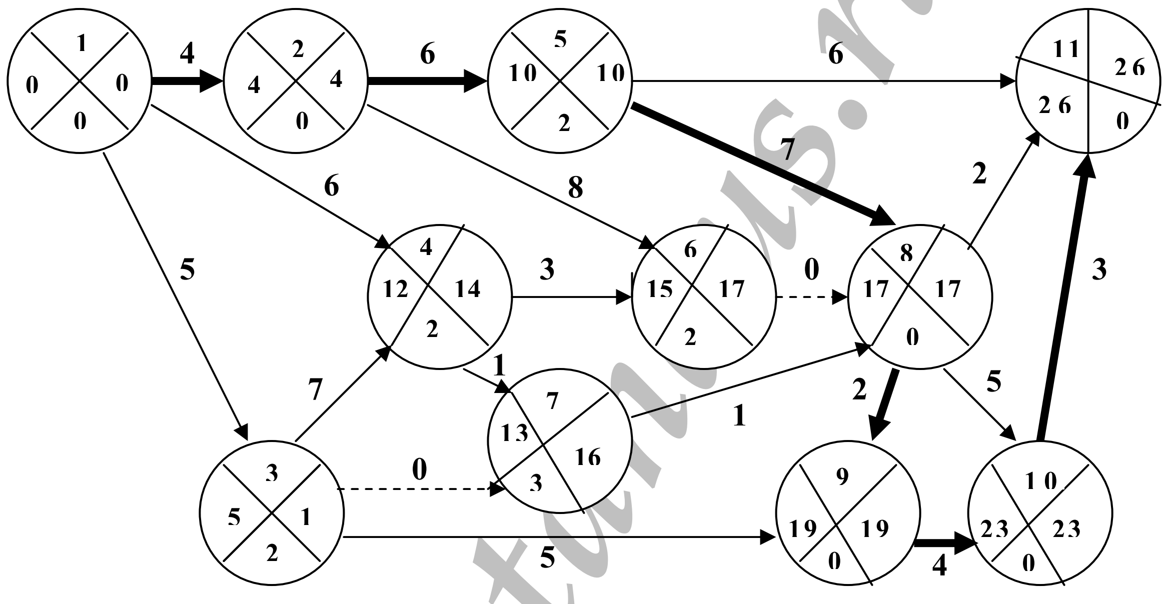

Рис. 6.1.

В верхнем секторе запишем номер (шифр) i события, в левом − по мере вычислений будем записывать ранний срок $t_p(j)$ совершения события i, в правом − поздний срок $t_n(i)$, в нижнем − резерв $R(i)$ времени события. Расчеты проводят в четыре этапа - вычисляют $t_p(j)$, $t_n(i)$, $R(i)$ и выделяют критический путь.

I этап. При вычислении ранних сроков свершения событий перемещаются по сетевому графику от исходного события 1 вправо по мере возрастания номеров событий.

Поскольку $t_p(1) = 0$, в левый сектор кружка 1 запишем 0. Затем рассмотрим событие 2, в которое входит только одна работа (1, 2). В соответствии с формулой (6.1) сложим число $t_p(1) = 0$ с числом $t(1,2) = 4$ и результат $t_p(2) = 4$ запишем в левый сектор кружка 2. Аналогично находим $t_p(3) = t_p(1) + t(1,3) = 0 + 5 = 5$ и записываем в левый сектор кружка 3.

При вычислении $t_p(4)$ учитываем, что в событие 4 входят две работы: (1, 4) и (3, 4). Составим две суммы: $t_p(1) + t(1,4)$ и $t_p(3) + t(3,4)$. По формуле (6.1) найдем

$$t_p(4) = \max(t_p(1) + t(1,4), t_p(3) + t(3,4)) = \max(0 + 6{,}5 + 7) = 12,$$

поэтому в левый сектор кружка 4 запишем 12. Аналогично вычислим ранние сроки и всех остальных событий, помня, что продолжительность фиктивной работы принимается равной 0. В конце вычислений найдем $t_p(11) = 26$, т.е. критический срок. Итак, $t_{kp} = 26$.

II этап. При вычислении поздних сроков свершения событий перемещаются по сетевому графику от завершающего события влево по мере убывания номеров событий. Поскольку $t_n(S) = t_p(S)$, то в правый сектор кружка 11 запишем число $t_p(11) = 26.$.

Рассмотрим далее предшествующее событие 10, из которого выходит только одна работа (10, 11) продолжительностью $t(10{,}11) = 3$. Следовательно, по формуле (6.2) получим $t_n(10) = t_n(11) - t(10{,}11) = 26 - 3 = 23$. Этот результат и запишем в правый сектор кружка 10. Аналогично находим $t_n(9) = t_n(10) - t(9{,}10) = 23 - 4 = 19.$

Из события 8 выходят три работы: (8, 9), (8, 10), (8, 11), поэтому определим поздний срок по каждой из этих работ, т.е. составим три разности: $t_n(9) - t(8{,}9), t_n(10) - t(8{,}10)$ и $t_n(11) - t(8{,}11)$. В соответствии с формулой (6.2) выбираем из них минимальную, которая и определит $t_n(8)$, т.е. $t_n(8) = \min(19 - 2{,}23 - 5{,}26 - 2) = 17.$ Это число и запишем в правый сектор кружка 8. Аналогично определяются поздние сроки свершения и всех остальных событий сетевого графика. Заметим только, что результатом расчетов должно быть равенство $t_n(I) = t_n(1) = 0.$

III этап. Для определения резервов времени событий в соответствии с формулой (6.3) достаточно из чисел, записанных в правых секторах кружков, вычесть числа, записанные в левых секторах. Полученные значения записываются в нижние секторы.

IV этап. У критических событий резерв времени равен 0, так что ранние и поздние сроки свершения совпадают. В нашем примере критическими являются события 1, 2, 5, 8, 9, 10 и 11, они и определяют критические работы и критический путь: 1−2−5−8−9−10−11. Все остальные временные параметры (сроки начала и окончания работ, резервы времени работ) легко определяются по найденным значениям t_p и t_n на основе формул (6.4) − (6.11). Так, для определения полного резерва времени работы надо из числа, стоящего в правом секторе кружка, изображающего конечное событие работы, вычесть число, записанное в левом секторе кружка, соответствующего начальному событию этой работы, и продолжительность работы (например, $R_n(4{,}7) = 16 - 12 - 1 = 3$).

Построение сетевой модели и ее последующий анализ рассмотрим на конкретном примере.

6.2. Пример сетевого планирования

Перечень работ по организации на промышленной выставке зала для демонстрации образцов продукции, выпускаемой производственным объединением, приведен в табл. 6.1. Требуется построить сетевой график выполнения комплекса работ.

Таблица 6.1

Содержание работы	Исходная работа	Опирается на работу
Обор образцов продукции для выставки	a_1	-
Изготовление информационных и рекламных материалов, указателей, надписей и т. д.	a_2	a_1
Изготовление стендов и другого оборудования для установки образцов в демонстрационном зале	a_3	a_1
Доставка образцов в демонстрационный зал	a_4	a_1
Доставка в демонстрационный зал стендов и другого оборудования	a_5	a_4
Монтаж стендов и другого оборудования	a_6	a_5
Установка образцов продукции на стендах	a_7	a_3 , a_6
Оформление залов и стендов указателями, надписями, рекламными и информационными материалами	a_8	a_2 , a_7
Репетиция открытия выставки	a_9	a_8

Решение. Обозначим работы в порядке их следования через $a_1, a_2, ..., a_9$. С учетом технологической зависимости работ друг от друга, установим их последовательную связь, т.е. для каждой работы укажем, на какие работы она «опирается».

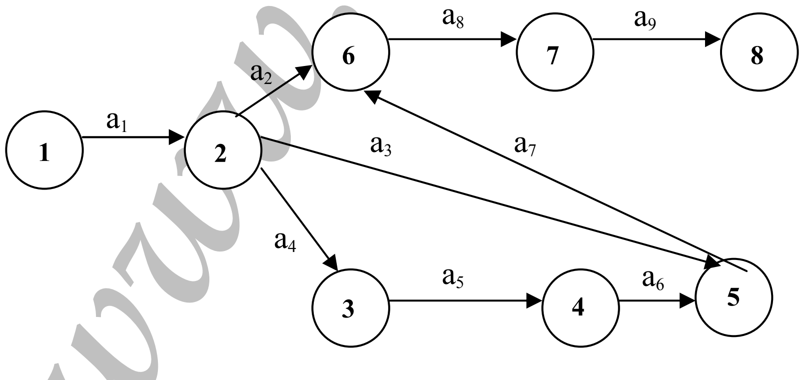

Рис. 6.2.

Приступив к построению сетевого графика (рис. 6.2), замечаем, что работа a_1 не опирается ни на какую работу, поэтому она изобразится дугой, выходящей из события 1, означающего исходный момент, с которого начинается выполнение рассматриваемого комплекса работ. На работу a_1 опираются работы a_2, a_3 и a_4, поэтому дуги, соответствующие этим работам, на сетевом графике будут следовать непосредственно за дугой a_1 (от события 2, означающего момент окончания работы a_1 и начало работ a_2, a_3 и a_4). На работу a_4 опирается работа a_5, а на нее − работа a_6, что и отражено на сетевом графике следующими друг за другом дугами a_5 и a_6. Работа a_7 опирается на работы a_3 и a_6 , поэтому дуга a_7 исходит из события 5, означающего момент, к которому завершены обе эти работы. Аналогичная ситуация имеет место и для работы a_8, исходящей из события 6, которое означает факт выполнения работ a_2 и a_7. Дуга a_9 соответствует последней работе, а конечное ее событие 8 означает момент завершения работ всего рассматриваемого комплекса.

В настоящее время сложные задачи сетевого программирования решаются с помощью компьютера на основе применения электронных таблиц MS Excel.

6.3. Задачи сетевого планирования для самостоятельного решения

Задача 1. На сетевых графиках, изображенных на рис. 6.3, найти ошибки, считая, что каждый график имеет одно исходное I и одно завершающее S событие.

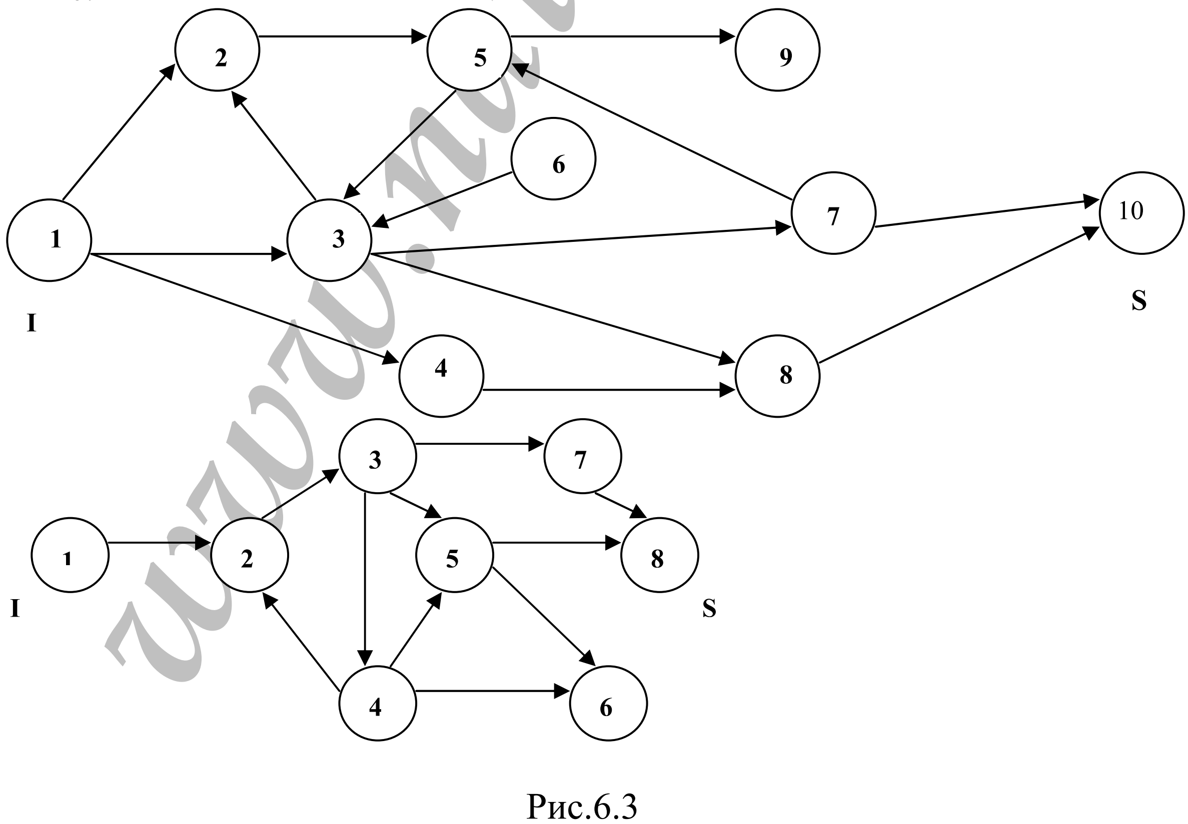

Рис.6.3

Задача 2. Построить фрагмент сетевого графика, включающего пять работ, если работы a_2 и a_3 начаты одновременно, работа a_4 может быть начата после выполнения работ a_1, a_2, a_3, работа a_5 может начаться после выполнения работы a_3.

Задача 3. Построить фрагмент сетевого графика, если начало работы a_5 зависит только от окончания работ a_1 и a_3, начало работы a_4 – только от окончания работы a_3, начало работы a_6 — только от окончания работ a_2 и a_3.

Задача 4. Построить фрагмент сетевого графика, содержащего шесть работ, если начало работы a_4 зависит от результата выполнения работы a_2, работа a_5 может быть начата после выполнения работ a_1, a_2, работа a_6 может быть начата после завершения работ a_3 и a_4.

Задача 5. Построить фрагмент сетевого графика, если он включает семь работ и при этом работа a_3 выполняется после работ a_1 и a_4, работа a_4 начинается после выполнения работы a_2, работа a_6 может быть выполнена после работ a_4 и a_5 , работа a_7 выполняется после завершения работ a_3 и a_6.

Задача 6. Построить сетевой график по следующим данным: работы a_1, a_2, a_3 могут выполняться одновременно после свершения исходного события; работы a_4 и a_5 начинаются после окончания работы a_1, работы a_6 и a_7 могут начаться после выполнения работ a_2 и a_4, начало работ a_8 и a_9 зависит от результата работы a_3, работа a_{10} может быть начата после выполнения работ a_5 и a_6,к работе a_{11} можно приступить после завершения работ a_7 и a_8, работу a_{12} следует начать после окончания работы a_9, работа a_{13} будет выполняться после завершения работ a_{10}, a_{11} и a_{12}.

Задача 7. Построить сетевой график по следующим данным:

а*) Таблица 6.2*

Исходная работа	Опирается на работу
a_1	–
a_2	–
a_3	–
a_4	a_1
a_5	a_2
a_6	a_2
a_7	a_3, a_5
a_8	a_4, a_6, a_7

б) *Таблица 6.3*

Исходная работа	Опирается на работу
a_1	–
a_2	–
a_3	–
a_4	a_1, a_2
a_5	a_2, a_3
a_6	a_2, a_3
a_7	a_6
a_8	a_4, a_5, a_7

в) *Таблица 6.4*

Исходная работа	Опирается на работу
a_1	–
a_2	–
a_3	a_1, a_2
a_4	a_1
a_5	a_1
a_6	a_4, a_5
a_7	a_4, a_5
a_8	a_3, a_7

Задача 8. Строительная фирма-подрядчик пытается составить план работ, связанных со строительством дома по заказу. В таблице приводятся данные о последовательности работ, отношениях предшествования и продолжительностях работ. Постройте соответствующую сетевую модель для последовательности работ и проанализируйте ее.

Таблица 6.5

Работа	Описание работ	Непосредственно предшествующие работы	Продолжительность работ, сутки
a	Начало		0
b	Рытье котлована и заливка основания	a	4
c	Заливка бетонного фундамента	b	2
d	Сооружение деревянного каркаса, в том числе крыши	c	4
e	Выполнение кирпичной кладки	d	6
f	Укладка канализационных и водопроводных труб в подвальном помещении	c	1
g	Заливка пола подвального помещения	f	2
h	Установка водопроводных труб	f	3

i	Прокладка проводов	d	2
j	Установка отопления и вентиляции	d,g	4
k	Крепление штукатурных труб и штукатурные работы	i,j,h	10
l	Кладка покрытия пола	k	3
m	Установка кухонной арматуры	l	1
n	Завершение слесарно-водопроводных работ	l	2
o	Завершение плотницких работ	l	3
p	Кровельные работы и нанесение гидроизоляции	e	2
q	Крепление водосточных труб	p	1
r	Кладка коллектора ливневых вод	c	1
s	Циклевка и покрытие полов лаком	o,t	2
t	Покраска	m,n	3
u	Завершение установки электрооборудования	t	1
v	Земляные работы	q,r	2
w	Заливка пешеходных дорожек и благоустройство территории	v	5
x	Окончание	s,u,v	0

Задача 9. Рассматривается проект по организации сбыта нового изделия. В таблице приводятся продолжительности работ, необходимых для выполнения проекта. Найдите минимальное время выполнения проекта.

Таблица 6.6

Номер	Работы	Предшествующие работы	Продолжительность, недели
0	Планирование работ	–	3
1	Составление учебного плана	0	6
2	Отбор слушателей	0	4
3	Подготовка брошюры	0	3
4	Проведение учебных занятий	1,2,3	1
5	Поставка образцов продукции	0	4
6	Печатание брошюры	3	5
7	Подготовка рекламных материалов	0	5
8	Выпуск рекламных материалов	7	1
9	Распространение брошюры	6	2

Задача 10.Фундамент здания больницы состоит из четырех последовательно сооружаемых секций. Для сооружения каждой секции необходимо выполнение таких работ, как рытье котлована, монтаж арматуры и заливка бетоном.

Рытье котлована для какой-либо одной секции не может начинаться до завершения этой работы для предыдущей секции. Это же относится и к заливке бетоном. После того как все котлованы вырыты, могут начинаться слесарно-водопроводные работы, но до заливки бетона можно выполнить только 15% этой работы. После подготовки фундамента каждой секции можно начинать выполнение еще 10% слесарно-водопроводных работ, если выполнены предыдущие 15% работы. Постройте сетевую модель для этого проекта.

Список литература:

1. *Калихман И.Л., Войтенко М.А.* Динамическое программирование в примерах и задачах. – М.: Высш. шк., 1979.- 125 с.
2. *Мотышина М.С.* Исследование систем управления и системный анализ. Методические и прикладные аспекты: Учебное пособие. СПб.: Изд-во СпбГУЭФ,2002.-116 с.
3. Сборник задач и упражнений по высшей математике. Математическое программирование. Учебное пособие /А.*В.Кузнецов, В.А.Сакович, Н.И. Холод* и др.; Под общей редакцией А.В.Кузнецова. Минск: Высш. шк.,1995.-382 с.
4 *Соколова Ж.В.* Линейное программирование для экономистов.- СПб.: Изд-во «Руна», 2003. -122 с.
5. Справочник по математике для экономистов / *В.Е.Барбаумов, В.И.Ермаков, Н.Н.Кривенцова* и др.; Под ред. В.И. Ермакова. М.: Высш. шк. – 1987. – 336 с.
6. *Филипс Д., Гарсиа-Диас А.* Методы анализа сетей.- М.:Мир, 1984.- 496с.
7. *Чернов В.П.* Введение в линейное программирование.- СПб.: Наука, 2002.- 108 с.

Сергей Иванович Росс

Математическое моделирование и исследование национальной экономики, Учебное пособие.

В авторской редакции

Компьютерная верстка М.В.Успенская

Дизайн М.В.Успенская

Зав.РИО Н.Ф.Гусарова

Лицензия ИД №00408 от 05.11.99

Подписано к печати 25.03.06

Отпечатано на ризографе заказ № 949 тираж 100

Редакционно-издательский отдел
Санкт-Петербургского государственного
университета информационных технологий,
механики и оптики
197101, Санкт-Петербург, Саблинская ул.14